**6 клас**

**1.** Учень прочитав книгу за три дні. В перший день він прочитав 0,2 всієї книги і ще 16 сторінок, на другий день 0,3 залишку і ще 20 сторінок. В третій день 0,75 залишку і останні 30 сторінок книги. Скільки сторінок було в книзі?

**2.** Щоб пронумерувати сторінки великої наукової роботи, знадобилось 3389 цифр. Скільки сторінок у роботі?

**3**. У шестицифровому числі перша цифра співпадає з четвертою, друга з п’ятою, третя – з шостою. Доведіть, що це число кратне 7,11,13.

**4.** Двоє по черзі вписують хрестики в клітинки таблиці розміром . Програє той, після чийого ходу утвориться квадрат , в усіх клітинках якого вписані хрестики. Хто виграє: той хто починає гру чи його суперник, і як потрібно грати, щоб виграти? Відповідь обґрунтувати.

**5.** Є сім зовні однакових монет, серед яких п‘ять справжніх (усі однакової маси) і дві фальшиві (однакової маси, але легші за справжні). Як за допомогою двох зважувань на шалькових терезах без гир виділити три справжні монети?

**9 клас**

**1.** При яких цілих значеннях *a* рівняння *x(a-1)2=(a+4)(a-1)* має цілі розв’язки?

**2.** У рівнобедреному трикутнику АВС (АС=ВС) провели медіану СС1 і бісектрису АА1. Знайдіть кут АСВ, якщо АА1 = 2СС1 .

**3.** В кожній клітині дошки 5×5 сидить жук. В деякий момент всі жуки переповзають на сусідні клітини (сусідніми вважаються ті, що мають спільну сторону). Доведіть, що після того як всі жуки переповзуть, знайдеться клітина, на якій сидітимуть принаймні два жуки.

**4.** В лісі росли сосни, кедри та ялинки, причому на всіх деревах було порівну шишок. Подув легкий вітерець, і декілька шишок упало на землю. виявилось , що з кожної сосни упало рівно11% її шишок, з кожного кедра – рівно 54%, а з кожної ялинки – рівно 97%. При цьому з усіх дерев разом упало рівно 30% усіх шишок. Доведіть, що кількість дерев у лісі ділиться на 43.

**5.** Рівність (х2+ах + 2)(х + 3) = (х + b)(х2+сх + 6) є тотожністю. Знайдіть суму а+b+с.

**7 клас**

**1.** Який кут утворює між собою годинна і хвилинна стрілка годинника о 5 год. 48 хв.?

**2.** Розмістити 6 точок на чотирьох прямих так, щоб на кожній з них було по три точки.

**3.** Знайти всі трійки простих чисел *a, b, c* таких що *7а – bc = 105*.

**4.** Скільки води потрібно долити до 25г 90-відсоткової кислоти, щоб одержати 75-відсоткову кислоту?

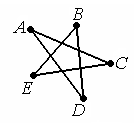
**5.** На столі стоять три однакові ящики. В одному з них 2 чорні кульки, в другому – 2 білі, в третьому – 1 чорна та 1 біла. На ящиках про це зроблено відповідні надписи, але відомо, що жоден з них не відповідає істині. Як, вийнявши лише одну кульку, встановити, де які кульки знаходяться?

**8 клас**

**1.** Ціна квитка на стадіон була 200 грн. Після зниження цін на квитки, кількість глядачів на стадіоні збільшилася на 50%, а виручка з проданих квитків збільшилася на 14%. Скільки став коштувати квиток на стадіон після зниження ціни?

**2.** Довести, що коли *a2 + b2 + c2 = ab + bc + ac*, де *a, b, c* – дійсні числа, то *a = b = c*.

**3.** В п’ятикутній зірці, що зображена на малюнку,  і . Відомо також, що . Доведіть, що .



4. Семеро піратів хочуть розділити скарб, який складається з 55 золотих злитків вагою 306г, 307г, … , 359г, 360г відповідно. Кожен з піратів буде задоволеним, якщо йому дістанеться принаймні 2,5 кг золота (і ні на грам менше). Чи можуть пірати розділити скарб, не розпилюючи злитки так, щоб кожен був задоволений?

**5.** Доведіть, що серед будь-яких ста цілих чисел, можна вибрати кілька (можливо, одне) різниця яких ділиться на 100.

**10 клас**

**1.** Розв’яжіть нерівність *(х2-х-12) ≤ 0.*



**2.** Доведіть, що сума медіан трикутника менше периметра, але більше півпериметра трикутника.

**3.** В бібліотеці не більше 5000 книжок. Якщо їх зв’язувати по 6, по 7, по 5, то залишиться одна книга, якщо зв’язувати по 11, то зайвих книжок не буде. Скільки книжок в бібліотеці?

**4.** Таблицю розмірами 5х5 заповнили натуральними числами 1, 2, ..., 25, причому будь-які два сусідні натуральні числа знаходяться у сусідніх зі спільною стороною клітинках. Дослідіть, яка максимальна кількість простих чисел могла опинитися в одному стовпчику такої таблиці.

**5.** Доведіть, що *сos*20°*cos*30°*sin*50°–*cos*10°*sin*40°*sin*80° є раціональним числом.

**11 клас**

**1**. Розв’язати нерівність: 

**2.** Дно прямокутної коробки викладено плитками розміром 2×2 та 1×4. Плитки висипали з коробки і загубили одну плитку 2×2. Замість неї дістали плитку розміром 1×4. Чи вдасться викласти тепер дно коробки?

**3.** Побудуйте графік функції 

**4**. Дотична в точці А до описаного кола трикутника АВС перетинає продовження сторони ВС за точку В у точці К. Точка L – середина АС, а точка М на відрізку АВ така, що ∠АКМ=∠СКL. Доведіть, що МА=МВ.

**5.** Доведіть, що на координатній площині не існує правильного трикутника, всі вершини якого мають цілі координати.

**Вказівки, відповіді та розв’язання.**

**6 клас**

**6.1.** Нехай у книжці було *х* сторінок. Перший день – (0,2*х* + 16) стор, залишилось прочитати на другий та третій дні (0,8*х* – 16) стор, на другий день прочитав (0,3(0,8*х* – 16) +20) = (0,24*х* + 15,2) стор, на третій день прочитати залишилось (0,56*х* – 31,2) стор. Так як на третій день прочитали 0,75 залишку і ще 30 стор, то залишок буде 120 стор. 0,56*х* – 31,2 = 120 *х* = 270

Відповідь: 270 сторінок.

**6.2**. Однією цифрою пронумеровано 9 стор, двома цифрами – 90 стор, трьома – 900 стор. Всього отримаємо 9 + 90 · 2 + 900 · 3 = 2889 (цифр).

Залишається ще 500 цифр, які використовувались для запису чотиризначного номеру сторінки. Таких сторінок 500 : 4= 125 (стор).

Отже , в науковій роботі 9 + 900 + 900 + 125 = 1124 (стор).

**6.3**. Позначимо відповідно першу, другу і третю цифри числа за a, b, c. Тоді число можно записати 100000а + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c = 100100a + 10010b + 1001c = 1001(100a + 10b + c) = 7 × 11 × 13 ×(100a + 10b + +c).

**6.4.**Відповідь*.* Виграє другий гравець.

Розділимо дошку на дві рівні частини горизонтальною прямою



(див. малюнок).

На кожний хід першого гравця другий повинен відповідати точно таким же ходом, але на другій частині дошки. Наприклад, якщо перший гравець поставив хрестик у лівий верхній кут, то другий гравець повинен поставити хрестик на лівій вертикалі у другу клітинку, рахуючи знизу.

Покажемо, що така стратегія другого гравця призведе його до виграшу. Після кожного ходу другого гравця картинка на обох половинках дошки буде однаковою. Якщо після ходу першого гравця в одній із половинок дошки не утворився квадрат , заповнений хрестиками, то і після ходу другого в другій половинці дошки такий квадрат утворитися не зможе.

Припустимо, що такий квадрат утворився після ходу другого гравця на «стику» двох половинок дошки. Але тоді такий же квадрат утворився раніше, після ходу першого гравця на одній із половинок дошки (див., наприклад, малюнок; останні ходи обох гравців позначені товстим і тонким пунктирним хрестиком відповідно).

**6.5. Вказівка.** Занумеруємо монети числами 1, 2, 3, … , 7. Першим зважуванням порівняємо монети 1, 2, 3 з монетами 4, 5, 6. Якщо маси рівні, то в кожній трійці по одній фальшивій монеті, а монета 7 справжня. Тоді наступним зважуванням порівняємо монети 1 і 2. Якщо їхня маса однакова, то вони справжні, а якщо ж ні, то важча з монет 1, 2 монета 3 і монета 7 – справжні. Якщо під час першого – початкового – зважування переважила одна з груп, то всі її монети справжні.

**Вказівки, відповіді та розв’язання.**

**7 клас**

**7.1.** Відповідь: 114˚

**7.2.**

**7.3.** bc=7a-105=7(a-15)

Так як b та c – прості, то одне з них дорівнює 7, а друге а-15.

Нехай, наприклад, b=7, c=a-15 , тоді або с або а – парне число, с = 2, а = 17. Випадок с=7,в=а-15 розглядається аналогічно.

Відповідь: а=17, b=7,с=2

а=17, b=2,с=7

**7.4.** Відповідь: 5 г.

**7.5**. Треба взяти кульку із ящика, на якому написано „1 чорна, 1 біла”. Яку б кульку з нього ми не вийняли, друга буде того ж кольору. Тоді у ящику, на якому написано, що обидві кульки мають колір вийнятої нами, насправді обидві кульки будуть протилежного кольору. Відповідно у третьому ящику опиняться кульки різного кольору.

**Вказівки, відповіді та розв’язання.**

**8 клас**

**8.1.** Розв’язання. Нехай х - кількість глядачів до зниження ціни, а у - нова ціна квитка. За умовою задачі 1,14 • 200х = 1,5 xy. Звідси у = 152. Відповідь. 152.

**8.2.**  Домножимо на 2 ліву і праву частину , тоді 2а2+2b2+2с2-2ab-2bc-2ac=0,

(a-b)2+(b-c)2+(a-c)2=0, це можливо коли a-b=0 і b-c=0 і a-c=0 , тоді a=b=c

8.3. Нехай відрізки  і  перетинають відрізок  у точках  і  відповідно (див. малюнок). Із умови випливає, що трикутники  і  рівні за стороною і двома прилеглими до неї кутами. З рівності цих трикутників випливає, що  і . Тоді  як суміжні до рівних кутів. Одержали, що в трикутнику  кути при стороні  рівні, тобто цей трикутник рівнобедрений. Звідки . Таким чином, , тобто трикутник  – рівнобедрений, з основою . Тому, , що і треба було довести.



**8.4.** Не можуть. Хтось з піратів обов’язково одержить не більше 7 злитків. Але вага 7 навіть найважчих злитків *360 + 359 + 358 + … + 354 = 2499(г) < 2,5(кг)*.

**8.5.** При діленні на 100 числа можуть давати сто різних остач від 0 до 99, якщо ми маємо саме такі числа, то одне з чисел ділиться на 100, а якщо ні, то принаймні два числа дають однакову остачу, а=100m+r , b=100k+r, a-b=100m-100n=100(m-n)

**Вказівки, відповіді та розв’язання.**

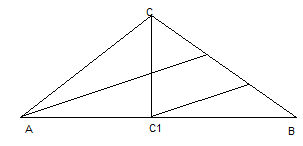
**9 клас**

**9.1.** При а = 1 маємо 0=0 рівняння має розв’язками всі дійсні числа, при а 1 х= =. Тоді а-1=, значить а = -4, 0, 2 або 6



Відповідь: а=-4, 0, 1, 2 або 6

**9.2.** Проведемо С1D || АА1. Так як АС1=С1В, то С1D – середня лінія АА1В.



Отже С1D=АА1=СС1, тоді СС1D –

рівнобедрений.

Нехай АСС1=С1СВ=СDС1=α,

тоді САС1= СВС1=90°-α; 1АС1 =DС1В=45°-. За властивістю зовнішнього кута трикутника:

СDС1= DC1B +DBC1, тоді α=45°- +90°-α.

Звідси 2α=108°,= 108°.

**9.3.** Розфарбуємо дошку в шаховому порядку , тоді зафарбованих клітиночок буде 13, а не зафарбованих 12 або навпаки. Коли жук переповзає на сусідню клітиночку, то обов’язково змінює колір клітини на якій знаходиться , отже 13 жуків із зафарбованих клітинок розмістилися на 12 не зафарбованих клітинах, значить знайдеться хоча б одна клітина на якій сидітиме принаймні два жуки.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**9.4.** Нехай m, n, k –кількість сосен, кедрів та ялин відповідно. Тоді . Віднімемо від обох частин : . Тепер видно, що  і справді ділиться на 43.

**9.5**. Підставляючи в дану систему рівнянь значення х=-1; 0; 1 отримаємо систему рівнянь відносно невідомих а, b, с, звідки отримаємо а = З, b = 1, с = 5, а тому а + b + с = 9.

**Вказівки, відповіді та розв’язання.**

**10 клас**

**10.1.** Розв’язуючи методом інтервалів і враховуючи знак модуля і допустимі значення х отримаємо розв’язок х [-3;0)(0;4]



**10.2.** В   медіани. Доведемо, що , , , , ,

A

B

C

N

O

K

M

. Доведемо другу частину

нерівності: в , в ,

в, в, в

, в .

Додамо нерівності, отримаємо

,

, , 

**10.3.** Нехай кількість книжок в бібліотеці n, n≤5000, тоді (n – 1)6, (n – 1)7,



(n – 1)5, (n – 1)210, n – 1= 210k, n =210k+1. Так як n11, то



n= 209k + k +1, тоді (k+1) 11, враховуючи обмеженість книжок в бібліотеці k = 10, або k = 21, тоді n = 210·10+1=2101, або n= 210·21+1= 4411.



**10.4.** Розмалюємо таблицю у шаховому порядку.Тоді всі непарні числа опиняться у клітинках одного кольору, а всі парні – у клітинках іншого кольору.Відповідно у кожному стовпчику виявиться не більше136 трьох непарних чисел. Оскільки 2 – єдине парне просте число, то більше чотирьох простих чисел в одному стовпчику опинитись не може. Такою є, наприклад,

таблиця, в якій у третьому стовпчику зверху вниз записані числа 19, 2, 5, 8, 11.

**10.5.** cos20°cos30°sin50°- cos10°sin40°sin80°=1/2((cos50°+ cos10°)sin50°- cos10°(cos40°- cos120°)) =1/2(cos50 *°* sin50 *°* +cos10 *°* cos120 *°*)=

=1/4(sin100 *°* - cos10°)=0.

**Вказівки, відповіді та розв’язання.**

**11 клас**

**11.1.** Розв’язок.

; ; ; хØ. Відповідь: хØ.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

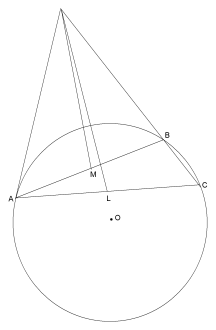
**11.2.** Розфарбуємо площу підлоги так як позначено на малюнку

Плитка розміром 22 обов’язково містить одну і тільки одну зафарбовану клітинку, а смужка 14 містить або дві або жодної зафарбованої клітинки, якщо одну плитку розміром 22 замінити на плитку розміром 14, то зміниться парність зафарбованих клітиночок, отже така заміна не можлива.

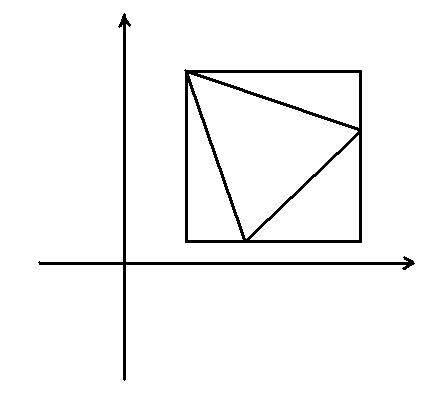


**11.3. Вказівка.**  Графік – парабола з вітками вгору і вершиною в точці 

**11.4.** Трикутники САК і АВК подібні, оскільки ∠К у них спільний і ∠КСА=∠КАВ як вписаний кут, що спирається на дугу АВ, і кут між хордою АВ і дотичною. Оскільки ∠АКМ=∠СКL, то відрізки КL і КМ – відповідні елементи в трикутниках САК і АВС. При цьому КL – медіана. Значить, КМ – також медіана і МА=МВ.



**11.5.** Припустимо, що координати вершин трикутника є цілими числами, тоді квадрат сторони трикутника



а2 = (хА – хВ)2 + (уА – уВ)2 є ціле число, а площа рівностороннього трикутника S = тоді є ірраціональним числом. З іншого боку розглянемо рівносторонній трикутник в системі координат , вписаний в прямокутник. Так як координати вершин трикутника цілі числа, то і координати вершин прямокутника – цілі, тоді площа прямокутника і площі прямокутних трикутників є цілими числами, значить площа заданого трикутника – ціле число, чого бути не може так як це число ірраціональне.

