5. ЗАДАЧІ НА СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ

***Задачі на складання рівнянь становлять розділ математики, що традиційно пропонується на вступних іспитах з математики. Під час розв’язування цих задач розвивається логічне мислення, формуються дослідницькі навички, а також уміння виконувати складні перетворення, що виникають у процесі розв’язу­вання відповідних систем рівнянь та нерівностей.***

***Текстові задачі умовно можна поділити на такі головні види:***

1. *хімічні задачі;*
2. *задачі на рух;*
3. *задачі на числа;*
4. *задачі на відсотки;*
5. *задачі на роботу;*
6. *нестандартні задачі.*

Ми розглянемо лише деякі з основних видів задач [3, 5, 10].

5.1 Хімічні задачі

Розглядаючи задачі на складання рівнянь, спинимося насамперед на тих, які стосуються понять «концентрація» і «процентний вміст». Зазвичай в умовах таких задач ідеться про утворення сплавів або розчинних сумішей двох чи кількох речовин.

Зазначені задачі розв’язують за таких основних припущень:

а) усі утворювані сплави чи суміші однорідні;

б) при злитті двох розчинів об’ємом  і  утворюється суміш, об’єм  якої дорівнює :

**

Зауважимо, що останнє співвідношення є саме припущенням, оскільки не завжди виконується в дійсності; при злитті двох розчинів не об’єм, а маса суміші дорівнює сумі мас відповідних складових.

Розглянемо для визначеності суміш трьох компонентів і Обсяг суміші  складається з обсягів чистих компонентів:

**

При цьому відношення

  

показують, яку частку повного об’єму суміші становлять об’єми окремих компонентів:

*  *

Відношення об’єму  чистого компонента в розчині до всього об’єму  суміші



називається ***об’ємною концентрацією***цього компонента.

Об’ємна концентрація — безрозмірна величина. Сума концентрацій усіх компонентів, що утворюють суміш, дорівнює одиниці:

**

Тому для того, аби структуру розчину, що складається з компонентів, було визначено, достатньо знати концентрацію -го компонента.

Якщо відомі концентрації  і компонентів, що утворюють дану суміш, то її об’єм можна поділити на об’єми окремих компонентів (рис. 1):

** (1)



Рис. 1

***Об’ємним процентним умістом***компонента *А* називається величина



тобто концентрація цієї речовини, виражена у відсотках.

Якщо відомий процентний уміст речовини *А,* то її концентрацію визначають за формулою:



Наприклад, якщо процентний уміст становить 70 %, то відповідна концентрація дорівнює 0,7. Процентному вмісту 10 % відповідає концентрація 0,1.

Так само (як відношення маси чистої речовини *А* у сплаві до маси всього сплаву)визначають і масову концентрація та процент­ний уміст. Про яку концентрацію — об’ємну чи масову — йдеться в конкретній задачі, завжди зрозуміло з її умови.

Існує порівняно небагато задач, в яких доводиться перераховувати об’ємну концентрацію на масову чи навпаки. Для того щоб це зробити, необхідно знати густину компонентів, що утворюють розчин чи сплав. Розглянемо, наприклад, двокомпонентну суміш з об’ємними концентраціями компонентів  і  ** і густиною компонентів, що дорівнює відповідно  і  Масу суміші можна знайти за формулою



де  і  — об’єми компонентів суміші. Масові концентрації компонентів подаються залежностями:





які визначають зв’язок цих величин з об’ємними концентраціями.

Як правило, в умовах задач розглядуваного типу повторюється одна й та сама конструкція: із двох чи кількох сумішей, що складаються з компонентів  утворюється нова суміш шляхом перемішування вихідних сумішей, узятих у певній пропорції. При цьому потрібно знайти, в якому відношенні компоненти  увійдуть у суміш, що вийшла.

Під час розв’язання таких задач зручно розглядами об’єм чи масу кожної суміші, а також концентрації їхніх компонентів  Відповідно до концентрацій потрібно «розщепити» кожну суміш на окремі компоненти, як це зроблено у формулі (1), а далі згідно з умовою задачі скласти нову суміш. При цьому легко підрахувати, який об’єм (яка маса) кожного компонента входить у суміш, що вийшла, а також повний об’єм (повну масу) цієї суміші. Після цього визначаються концентрації компонентів  у новій суміші.

Проілюструємо сказане вище на прикладі наступної задачі.

**Задача.** *Маємо два куски сплаву міді і цинку з масовим процент­ним вмістом міді відповідно р % і q %. В якому відношенні потрібно взяти ці сплави, щоб, переплавивши взяті куски разом, одержати сплав, що містить r % міді?*

⮚ Побудуємо схему, що унаочнює умову задачі (рис. 2). Концентрація міді в першому сплаві дорівнює *р*/100, у другому — *q*/100.



Рис. 2

Якщо першого сплаву взяти *х* кг, а другого *у* кг, то за допомогою масових концентрацій можна «розщепити» ці величини на окремі складові:

 (кг міді) +  (кг цинку);

 (кг міді) +  (кг цинку).

Маса, кг, міді в утвореному сплаві така:

,

а маса цього сплаву становитиме  кг. Звідси знаходимо нову концентрацію міді в сплаві:



За умовою задачі ця концентрація має дорівнювати *r*/100. Тому дістаємо рівняння



або



Розв’яжемо здобуте рівняння. Насамперед зазначимо, що рівняння містить дві невідомі *х* і *у*.Неважко зрозуміти, що обидві невідомі однозначно не визначаються. Концентрація утворюваного сплаву визначається не масою взятих кусків, а відношенням цих мас. Тому в задачі потрібно визначити не самі значення *х* та *у,* а тільки їх відношення.

Запишемо рівняння задачі в такому вигляді:



Розглянемо можливі випадки.

1. *p = r = q.*

У цьому випадку концентрації всіх сплавів однакові і рівняння показує, що існує нескінченна множина розв’язків. Можна взяти скільки завгодно першого сплаву і скільки завгодно другого сплаву.

2. *p* = *r* ≠ *q.*

У цьому випадку рівняння набирає вигляду



звідки знаходимо: *х* — будь-яке, *у* = 0.Фізичний зміст цього розв’язку зрозумілий: якщо концентрація сплаву, який потрібно одержати, збігається з концентрацією першого сплаву, але не дорівнює концентрації другого сплаву, то першого сплаву можна взяти скільки завгодно, а другого сплаву не брати зовсім.

3. *p* ≠ *r* = *q.*

Дістаємо рівняння



звідки знаходимо: *у* — будь-яке, *х* = 0.

4. *р* ≠ *м, р* ≠ *q*, *q* ≠ *r.*

У цьому випадку можна записати:



Оскільки *у* ≠0, то



Це значення буде розв’язок задачі, якщо виконується нерівність



Неважко показати, що ця нерівність справджується, якщо значення *r* міститься між значеннями *р* та *q.* Таким чином, якщо *р*≠ *q*,то можна одержати сплав із будь-яким процентним вмістом міді між *р* і *q.*

Незважаючи на те, що цей приклад дуже простий, він доволі добре ілюструє основний метод розв’язування задач, пов’язаних із сумішами.

Розглянемо ще одну задачу.

Якщо в посудині об’єму *V*0, містить *р* % розчин солі. Із посудини виливається *а п* суміші і додається *а* л води. Ця процедура повторюється *п* разів. Тоді концентрація солі в розчині після *п* переливань визначається формулою:

 (2)

**Задача.** *У посудині об’ємом V*0 *міститься а* л *солі. Значення a/V*0 *відоме. Після скількох переливань концентрація солі в розчині зменшиться більш ніж у k раз?*

* Використовуючи формулу (2) для концентрації солі в розчині після *п* переливань, дістаємо



Звідси знаходимо



Найменша кількість таких переливань дорівнює . ⮘

**Задача.** *Відомо, що після п переливань концентрація солі в розчині зменшилася в k раз. Визначити, яку частину об’єму посудини становлять а* л.

* Відповідно до формули (2), якою подається концентрація солі в розчині після *п* переливань, маємо



або



Звідси знаходимо шукане відношення:

 ⮘

Зауваження. Формула (2) пов’язана з правилом нарахування «складних відсотків».

Про «складні відсотки» говорять у тому разі, коли значення деякої величини поетапно змінюється, причому на кожному етапі зміна становить певну кількість відсотків від значення, що його ця величина мала на попередньому етапі.

Розглянемо спочатку випадок, коли наприкінці кожного етапу значення величини змінюється на ту саму сталу кількість *р* від-
сотків.

Деяка величина *А*, вихідне значення якої дорівнює *А*0, наприкінці першого етапу матиме значення



Наприкінці другого етапу її значення становитиме



Тут множник  показує, у скільки разів значення величини збільшилося за один етап. У попередніх задачах про концен­трації цю роль відігравав множник 

Наприкінці третього етапу



і т. д.

Неважко зрозуміти, що наприкінці *п*-го етапу значення величини *А* подається формулою:

 (3)

Ця формула показує, що значення величини *А* зростає (або спадає, якщо *р* < 0) як геометрична прогресія, перший член якої *А*0, а знаменник дорівнює



**Задача.** *Ощадкаса виплачує 3 % річних. Через скільки років внесена сума подвоїться?*

* Нехай внесок становить *А*0грн. Тоді через *п* років на цьому рахунку буде 2*А*0 грн. Маємо:





*Відповідь.* Через 23 роки.

Формула (3) широко застосовується на практиці, коли розглядувані величини змінюються поетапно, причому їхня зміна за етап становить *р* %.

Неважко з’ясувати, як змінюються ці величини, якщо відсотки нараховувати протягом кожного етапу не один раз, а *т* раз із розрахунку *р*% за етап (тобто щоразу нараховувати по ).Легко зрозуміти, що за *п* етапів нарахування відсотків відбудеться *тп* раз.

Скориставшись формулою (3), дістанемо:



Тут  — значення величини *А* в кінці *п-*гоетапу за умови, що протягом кожного етапу відсотки нараховувалися *т* разів.

Необмежено збільшуючи число *m*, ми переходимо до розгляду неперервної зміни величини *А.* Тоді граничне значення величини *А* в кінці *n*-го етапу визначиться формулою



Таким чином, задача про неперервне нарахування відсотків приводить до необхідності обчислювати одну з визначних границь математики. Ця границя позначається буквою *е* і є основою *натуральних логарифмів:*



Остаточний вигляд розглядуваної формули такий:



Показникова функція в правій частині останньої формули називається *експонентою.*

Наведемо узагальнення формули (3) на випадок, коли приріст величини *А* на кожному етапі різний.

Нехай величина *А* наприкінці першого етапу змінюється на *р*1 %, наприкінці другого етапу — на *р*2%, наприкінці третього етапу — на *р*3 % і т. д. Якщо *pk* > 0, то величина *А* на цьому етапі зростає; якщо *pk* < 0, то величина *А* на цьому етапі спадає.

Зміна величини *А* на *р* % рівносильна множенню цієї величини на Тому остаточний вигляд шуканої формули такий:

 (4)

де *А*0 — початкове значення величини *А.*

Іноді в задачах на складання рівнянь зустрічається поняття «середній відсоток приросту». Ідеться про такий сталий відсоток приросту, який за *п* етапів давав би таку саму зміну величини *А*, якої вона набуває внаслідок низки поетапних змін на неоднакову кількість відсотків.

Середній відсоток приросту *q* % визначається за формулою:



або



Звідси випливає, що середній відсоток приросту не дорівнює середньому арифметичному величин  Тут існує пов­на аналогія з відомим із фізики поняттям «середня швидкість руху».

**Задача.** *Виробництво продукції за рік роботи підприємства зросло на* 21 %. *Наступного року воно збільшилося на* 44 %. *Визначити середній щорічний приріст продукції за цей період.*

* Позначимо середній щорічний приріст продукції через *q* %.Тоді



Звідси знаходимо





1. У посудину місткістю 6 л налито 4 л 70 %-го розчину сірчаної кислоти. У другу сосудину тієї самої місткості налито 3 л 90 %-го розчину сірчаної кислоти. Скільки літрів розчину потріб­но перелити з другої посудини в першу, щоб у ній утворився *r*%-й розчин сірчаної кислоти? Знайти всі *r,* при яких задача має розв’язок.

*Відповідь.*  

2. Виробництво продукції за перший рік роботи підприємства зросло на *р*%, а за наступний рік воно зросло на (*p* + 10) %. Визначити, на скільки відсотків збільшилося виробництво за перший рік, коли відомо, що за два роки воно зросло в цілому на 48,59 %.

*Відповідь.* На 17 %.

3. Протягом року завод двічі збільшував випуск продукції на ту саму кількість відсотків. Знайти цю кількість, коли відомо, що на початку року завод щомісяця випускав 600 виробів, а наприкін­ці року став випускати щомісяця 726 виробів.

*Відповідь.* 10 %.

4. В господарстві поголів’я тварин збільшується в результаті природного приросту і придбання нових тварин. На початку першого року в господарстві було 3000 голів, а наприкінці цього року воно придбало 700 голів. Наприкінці другого року господарство мало 4400 голів. Визначити відсоток природного приросту.

*Відповідь.* 10 %.

**5.** Суміш рівних об’ємів двох речовин має масу  г. Маса другої речовини в суміші дорівнює масі 52/7 см3 першої речовини, а густина другої речовини дорівнює 1 г/см3. Знайти об’єм кож­ної речовини в суміші.

*Відповідь.* 4 см3.

5.2 Задачі на рух

Розглянемо задачі на складання рівнянь, які умовно можна назвати *задачами на рух*. Система рівнянь, яку необхідно скласти на підставі умови кожної з таких задач, містить зазвичай параметри руху: пройдену відстань (*S*), швидкості тіл, що рухаються, (*u*, *v*, *w*), час руху (*t*)*.*

Зауважимо, що позначення тих чи інших невідомих прийнятими для них у фізиці буквами зосереджує увагу на суті задачі, робить систему рівнянь більш зрозумілою для розв’язування задачі, виключає випадкові помилки, що можуть виникати через безликість введених позначень.

***Припущення,***що звичайно приймаються (якщо не зроблено іншого застереження) в умовах задач на рух, полягають ось у чому:

а) рух на окремих ділянках вважається рівномірним; при цьому пройдений шлях визначається за формулою



б) повороти тіл, що рухаються, вважаються миттєвими, тобто відбуваються без витрат часу; швидкість при цьому також змінюється миттєво;

в) якщо тіло рухається за течією ріки, то його швидкість *w* складається зі швидкості в стоячій воді *v* і швидкості течії ріки *u:*



а якщо проти течії ріки, то його швидкість дорівнює



Якщо в умові задачі мова йде про рух плотів, то це означає, що тіло рухається зі швидкістю течії ріки.

До задач на рух належать також задачі, в яких хтось виконує деяку роботу; задачі, пов’язані з наповненням і спорожнюванням резервуарів. У задачах такого типу робота чи об’єм резервуара відіграє роль відстані, а продуктивність об’єктів, що виконують роботу, аналогічні швидкостям руху.

У задачах на рух особливо корисно будувати ілюстративний рисунок, фіксуючи всі характерні моменти — зустрічі, зупинок і поворотів. Вдалий рисунок допомагає зрозуміти зміст задачі, усвідомити зв’язок між даними та невідомими. Приклади таких креслень наведено далі.

При розв’язуванні задач на рух доводиться розглядати такі дві ситуації:

а) рух двох точок назустріч одне одному (рис. 1); якщо початкова відстань між двома точками, що рухаються назустріч одна одній зі швидкостями  і дорівнює  то час, через який вони зустрінуться, дорівнює





Рис. 1

б) рух в одному напрямі (рис. 2); якщо початкова відстань між двома точками, з яких одна наздоганяє іншу, дорівнює  той час, через який друга точка (швидкість ) дожене першу (швидкість ), дорівнює

 



Рис. 2

Розглянемо тепер методику складання рівнянь по тексту задачі. Зробимо це на конкретних прикладах.

**Задача.** Міста *А* і *В* розташовані на березі річки, причому місто *В* розташоване нижче за течією. О 10-й годині ранку з міста *А* до міста *В* відпливає пліт і одночасно з міста *В* до міста *А* відпливає човен, який зустрічається з плотом через 5 годин. Допливши до міста *А*, човен повертає у зворотному напрямі і припливає одночасно з плотом. Чи встигне човен або пліт прибути до міста *В* о 10 годині вечора (того самого дня)?

* За умовою задачі будуємо рис. 3.



Рис. 3

Виділимо з умови задачі речення, математичний запис яких утворить рівняння. Їх два:

* човен і пліт відправляються одночасно і зустрічаються через 5 годин;
* човен повертається в місто *В* одночасно з плотом.

Для математичного запису цих речень потрібно з’ясувати, які невідомі потрібно розглянути. В основу вибору невідомих можна покласти простий принцип: невідомі варто вводити так, щоб за їх допомогою найлегше записати у вигляді рівнянь наявні в задачі умови. При цьому зовсім не обов’язково, щоб величина, яку потрібно визначити, фігурувала серед невідомих.

Наприклад, у розглядуваній задачі такі параметри, як відстань між містами *s*, швидкість течії ріки (і плоту) *u* і швидкість човна в стоячій воді *v*, дають змогу дуже просто записати всі наявні умови (див. таблицю).

|  |  |
| --- | --- |
| Умова задачі | Рівняння |
| Човен і пліт відправляються одночасно і зустрічаються через 5 год |   |
| Човен повертається в *В* одночасно з плотом  |  |

В останньому рівнянні співвідношення являє собою час руху плоту,  — час руху човна проти течії,  — час руху човна вниз за течією ріки.

Таким чином, маємо систему двох рівнянь із трьома невідомими. Ясно, що всі три невідомих *s*, *u* і *v* з цієї системи двох рівнянь однозначно знайти не можна. Тому звернемося ще раз до умови задачі. Що ж потрібно визначити? У задачі запитується, чи встигне човен або пліт прибути в місто *В* до 10 год вечора, тобто більший чи менший за 12 год час руху човна. Оскільки цей час дорівнює *s/u,* то з’ясовується, що потрібно визначити не самі невідомі *s* і *u*, а тільки їх відношення, величину *s*/*u*.

Систему рівнянь задачі можна записати в такому вигляді



або



Таким чином, ця система фактично містить тільки два невідомих: *s/v* і *u/v.*

З другого рівняння визначається значення співвідношення *u*/*v.* Воно дорівнює  Таким чином, маємо

 

Після цього відразу визначається співвідношення 



Виходить, човен і пліт не встигнуть приплисти в пункт *В* до 10 год вечора того ж дня.

*Зауваження.* 1. Умова цієї задачі не містить величин, що мають розмірність довжини. Тому тут можна було б позначити відстань між містами через 1. Фактично це означало б, що відстань між містами взято за одиницю вимірювання довжини. Тоді з першого рівняння знаходимо швидкість руху човна і потім час руху 

2.Розгляд цих двох прикладів показує, у чому полягає методика складання рівнянь за текстом задачі. Її сутність у тому, щоб виділити в тексті задачі ті речення, що пов’язують між собою параметри руху. Після введення невідомих за принципом найбільшої зручності запису відповідних зв’язків виходять рівняння, що визначають розв’язок задачі.

Як останній приклад в цьому підрозділі розглянемо задачу на виконання роботи. Як уже зазначалося, такі задачі з повним правом можна прирахувати до задач на рух.

**Задача.** Дві машини, що риють тунель назустріч одна одній, закінчили його проходження за 60 днів. Якщо перша машина працювала б 18 днів, а друга 16 днів, то разом вони пройшли б 60 м тунелю. Якщо перша машина виконала б 2/3 всієї роботи другої машини з проходження тунелю, а друга 0,3 всієї роботи першої машини, то першій знадобилося б для цього на 6 днів більше, ніж другій. Скільки метрів тунелю в день проходить кожна машина?

* Введемо, за аналогією до швидкостей у задачах на рух, продуктивності машин  (м/день) і  (м/день). Тоді всю роботу — довжину тунелю — можна розглядати як аналог відстані в задачі на рух. При цьому вона визначається сумою



Тут  — обсяг роботи, виконаної першою машиною, а  — обсяг роботи, виконаної другою машиною.

Складемо рівняння задачі, користуючись таблицею:

|  |  |
| --- | --- |
| Умова задачі | Рівняння |
| Якщо б перша машина працювала 18 днів, а друга — 16 днів, то було б пройдено 60 м тунелю |  |
| Якщо б перша машина виконала 2/3 всієї роботи другої машини, а друга — 0,3 всієї роботи першої машини, то першій знадобилось би для цього на 6 днів більше, ніж другій |  |

Після спрощень система рівнянь набере вигляду



Цю систему зручніше за все розв’язати, якщо записати друге рівняння у вигляді квадратного рівняння для відношення продуктивностей 



З двох розв’язків цього рівняння беремо додатний:

 тобто 

Використовуючи цей результат разом з першим рівнянням системи, знаходимо

 м/день;  м/день.



**1.** З міста *А* до міста *В* виїжджає велосипедист, а через 3 год після його виїзду з міста *В* назустріч йому виїжджає мотоцикліст, швидкість якого в три рази більша, ніж швидкість велосипедиста. Велосипедист і мотоцикліст зустрічаються посередині між *А* і *В.* Якби мотоцикліст виїхав не через 3, а через 2 год. після велосипедиста, то зустріч відбулася б на 15 км ближче до *А.* Знайти відстань між містами *А* і *В.*

*Відповідь.* 180 км.

**2.** Перша і друга бригади одночасно почали виконувати деяку роботу. Більш ніж через годину після початку роботи першу бригаду перемінила третя, котра разом із другою працювала до завер­шення всієї роботи. На виконання роботи зазначеним способом пішло 5,5 год. Перша бригада за весь час, поки вона працювала, зробила стільки, скільки третя робить за годину. Якби перша бригада пропрацювала на 6 год більше, ніж це було насправді, то вона зробила б стільки ж, скільки було зроблено другою бригадою. Якби три бригади увесь час працювали разом, то робота була б виконана в 1,5 рази швидше, ніж у дійсності. Скільки часу працювала перша бригада?

*Відповідь:* 2,5 год.

**3.** З пункту *А* в пункт *В* виїхав автомобіль і одночасно з пункту *В* в пункт *А* виїхав велосипедист. Після зустрічі вони продовжували свій шлях. Автомобіль, доїхавши до пункту *В*, негайно повернув назад і наздогнав велосипедиста через 2 год після моменту першої зустрічі. Скільки часу після першої зустрічі їхав велосипедист до пункту *А*, коли відомо, що до моменту другої зустрічі він проїхав 2/5 усього шляху від *В* до *А*?

*Відповідь.* 8 год. 45 хв.

**4.** Дві труби, діючи разом протягом 1 год, наповняють водою 3/4 басейну. Якщо спочатку перша труба наповнить 1/4 частину басейну, а потім друга при відімкненій першій доведе об’єм води до 3/4 басейну, то на це знадобиться 2,5 год. Якщо першу трубу включити на 1 год, а другу — на півгодини, то вони наповнять басейн більш ніж наполовину. За який час наповняє басейн кожна труба?

*Відповідь:* 2 год і 4 год.

**5.** Міста *А* і *В* розташовані на березі ріки, причому місто *А* розташоване нижче за течією. З цих міст одночасно назустріч один одному виходять два човни, що зустрічаються посередині між містами *А* і *В.* Продовживши свій шлях після зустрічі в колишніх напрямках і досягши відповідно міст *В* і *А*,човни миттєво повертають назад і зустрічаються знову на відстані 20 км від місця першої зустрічі. Якби ті човни, вийшовши одночасно з міст *А* і *В*, попливли обидва проти течії, то човен, що вийшов з *А*, наздогнав би човен, що вийшов з *В*, у 150 км від *В.* Знайти відстань між містами *А* і *В.*

*Відповідь.* 100 км.

**6.** Автозавод виготовляє легкові і вантажні автомобілі. Першого дня було виготовлено вантажних автомобілів на 100 машин більше, ніж легкових. Другого дня було виготовлено легкових автомобілів на 150 машин більше, ніж першого дня, а вантажних машин — на 50 більше, ніж першого дня. Скільки легкових і скіль­ки вантажних автомобілів було виготовлено в перший день, якщо в другий день було виготовлено машин у 1,2 раза більше, ніж у перший?

*Відповідь.* 450 і 550.

**7.** Два екскаватори різної конструкції повинні прокласти дві траншеї однакового поперечного перерізу довжиною в 960 і 180 м. Уся робота тривала 22 дні, протягом яких перший екскаватор прокладав велику траншею. Другий екскаватор почав працювати на 6 днів пізніше першого, відрив меншу траншею, 3 дні ремонтувався і потім допомагав першому. Якби не потрібно було витрачати часу на ремонт, то робота була б закінчена за 21 день. Скільки метрів траншеї може вирити в день кожний екскаватор?

*Відповідь:* 40 м, 20 м.

5.3 Задачі, в яких кількість невідомих перевищує кількість рівнянь системи

Серед прикладів, розглянутих у попередніх підрозділах, уже зустрічалися задачі, в яких кількість невідомих у системі рівнянь перевищувала кількість самих рівнянь. Причини, що призводили до такої ситуації, пов’язані зі способом розв’язування задач. Якщо вибирати невідомі для складання рівнянь, керуючись принципом найбільшої зручності математичного запису умов задачі, то величини, яку необхідно знайти, може серед них не бути. Як правило, така величина подається деякою комбінацією введених невідомих, тому може статися, що однозначно визначити всі невідомі із системи рівнянь неможливо, проте шукана комбінація цих невідомих знаходиться однозначно.

Розглянемо кілька прикладів, що ілюструють цей клас задач на складання рівнянь.

**Задача.** Школяр витратив деяку суму грошей на придбання портфеля, авторучки і книги. Якби портфель коштував в 5 разів менше, авторучка — у 2 рази менше, а книга — в 2,5 рази менше, ніж насправді, то та сама покупка коштувала б 8 грн. Якби портфель був у 2 рази дешевшим, авторучка — у 4 рази дешевшою, а книга — в 3 рази дешевшою, те за ту саму покупку школяр заплатив би 12 грн. Скільки коштує вся покупка і за що було сплачено більше: за портфель чи за авторучку?

* Найбільш природно ввести в цій задачі ціну портфеля, авторучки і книги:  і  грн відповідно. Тоді перша і друга умови задачі дають два рівняння:



чи



Таким чином, ми маємо у своєму розпорядженні систему двох рівнянь, в яку входять три невідомих. Зрозуміло, що визначити всі три невідомих однозначно з такої системи не можна. Однак умова задачі і не вимагає цього Необхідно знайти лише вартість усієї покупки, тобто величину А така комбінація невідомих легко знаходиться з наведеної системи рівнянь.

Справді, коефіцієнти при невідомих у системі такі, що, додав­ши почленно рівняння системи, дістанемо



або



тобто вся покупка коштує 28 грн.

Порівняємо між собою величини *х* і *у.* Крім величини  із системи рівнянь знаходимо



або



Оскільки    і  то звідси випливає, що  Отже,  тобто 

*Відповідь.* 28 грн; портфель дорожчий за авторучку.

**Задача.** Три пункти *А*, *В* і *С* сполучені прямолінійними дорогами (див. рисунок). До відрізка дороги *АВ* примикає квадратне поле зі стороною, що дорівнює  до відрізка дороги  примикає квадратне поле зі стороною, що дорівнює , а до відрізка дороги  примикає прямокутна ділянка лісу довжиною  і шириною 4 км. Площа лісу на 20 км2 більша від суми площ квадратних полів. Знайти площу лісу.



Рис.

* Нехай   . Тоді, виходячи з умов задачі, можна скласти тільки одне рівняння:



або

 (1)

Таким чином, маємо одне рівняння з трьома невідомими. Розв’язок задачі можна знайти, якщо врахувати, що  — це сторони трикутника, які задовольняють відомі геометричні нерівності:

а) 

б)  (2)

в) 

Ці нерівності дають необхідні і достатні умови, при яких три відрізки  і  утворюють трикутник; у разі перетворення однієї з нерівностей на рівність трикутник вироджується у відрізок прямої.

Підставляючи вираза для  з (1) у (2), дістаємо нерівність



яку можна переписати в такому вигляді:



(Тут щодо змінних *х* і *у* було використано перетворення, яке називається *виділенням повного квадрата.)*

Оскільки сума двох невід’ємних доданків не може бути меншою за нуль, те останні нерівності виконуються тільки в тому випадку, якщо

 і 

Це і є ті додаткові рівняння задачі, що дозволяють визначити розв’язок. Знаходимо

  

Оскільки  то стає зрозумілим, що пункти  і знаходяться на одній прямій. Площа лісу, яка дорівнює 4*z* км2, становить 40 км2. Звичайно, таку задачу можна розв’язати тільки при спеціальному доборі числових даних.



**1.** Троє робітників повинні виготовити 80 однакових деталей. Відомо, що всі троє разом виготовляють за годину 20 деталей. До роботи приступив спочатку перший робітник. Він виготовив 20 деталей, затративши на це більше трьох годин. Частину роботи, що залишилася, виконали разом другий і третій робітники. На всю роботу пішло 8 год. Скільки годин потрібно було б першому робітнику на всю роботу, якби він виконував її сам?

*Відповідь.* 16 год.

**2.** Господарство має у своєму розпорядженні трактори чотирьох марок *А, Б, В* и *Г.* Бригада з чотирьох тракторів (два трактори марки *Б* і по одному трактору марок *В* і *Г*) виорює поле за два дні. Бригада з двох тракторів марки *А* і одного трактора марки *В* витрачає на цю роботу три дні, а три трактори марок *А, Б* і *В* — чотири дні. За скільки часів виконає роботу бригада, складена з чотирьох тракторів різних марок?

*Відповідь. * дня.

**3.** Туристський клуб розробив маршрути декількох походів: а) дводенний байдарковий похід; б) дводенний велосипедний похід; в) восьмиденний комбінований похід (чотири дні на байдарці, чотири дні пішки); г) п’ятиденний похід (один день на плоту, один день на байдарці, три дні пішки); д) шестиденний похід (три дні на плоту і три дні пішки). Третій маршрут довший за другий на 40 км, другий довший за перший на 80 км, а довжина четвертого маршруту 90 км. Передбачається, що при кожному даному способі пересування за кожний день припадає та сама відстань. Знайти довжину п’ятого маршруту

*Відповідь.* 90 км.

**4.** З пункту *А* по одному шосе виїжджають одночасно два автомобілі, а через годину слідом за ними виїжджає третій. Ще через годину відстань між третім і першим автомобілями зменшилася в півтора рази, а між третім і другим — у два рази. Швидкість якого автомобіля — першого чи другого — більша і в скільки разів, коли відомо, що третій автомобіль не обганяв перших двох?

*Відповідь.* Швидкість першого автомобіля в 9/8 рази більша, ніж другого.

5.4 Задачі з цілочисловими невідомими

Далі розглядаються задачі на складання рівнянь або нерівно­стей, в яких невідомі величини можуть набувати тільки цілих значень. Дуже часто ці задачі складено так, що розв’язати їх однозначно можна, лише врахувавши цю обставину.

**Задача.** В автоперегонах беруть участь команди, що мають однакову кількість автомобілів марки «Волга» і марки «Москвич», причому в кожній команді кількість усіх автомобілів менша за 7. Якщо в кожній команді кількість автомобілів марки «Волга» залишити без зміни, а кількість автомобілів марки «Москвич» збільшити в три рази, то загальна кількість «Москвичів», що беруть участь у гонках, буде на 50 більшою від загальної кількості «Волг», а кількість автомобілів у кожній команді перевищить 12. Визначити кількість команд, що беруть участь у гонках, і кількість «Волг» та «Москвичів» у кожній команді.

* Позначимо кількість команд, що беруть участь у гонках, через *N*, а кількість «Волг» і «Москвичів» у кожній команді — через *т* і *п* відповідно.

Умова задачі приводить до такої системи рівнянь і нерівностей (див. таблицю).

|  |  |
| --- | --- |
| Умова задачі | Рівняння, нерівність |
| У кожній команді кількість усіх автомобілів менша за *7*  |  |
| Якщо в кожній команді число «Волг» залишити без зміни, а кількість «Москвичів» збільшити в три рази, то «Москвичів» стане на 50 більше, ніж «Волг»  |  |
| При цьому кількість автомобілів у кожній команді перевищить 12  |  |

Виявляється, що навіть такої невеликої кількості інформації достатьо для однозначного визначення трьох цілих додатних невідомих  і Справді, подамо останню нерівність системи у вигляді



або



Оскільки *т* і *п* — натуральні числа, то першу нерівність си­стеми можна записати так:  очевидно також, що  Використовуючи ці обмеження, дістаємо: що 

Можливі варіанти:

1)  

2)  

3)  

Відповідно до цього єдине наявне в системі рівняння дає:

1) 

2) 

3) 

Оскільки *N* — ціле число, то маємо тільки в другому випадку. Отже, 

*Відповідь.* У гонках брали участь 5 команд, у кожній з який 2 «Волги» і 4 «Москвичі».

Нарешті, останній приклад задачі такого типу.

**Задача.** Зустрічаються дві команди шашкістів *А* і *В*. За умовами змагань кожен учасник однієї команди грає по одній партії з кожним учасником іншої команди. Загальна кількість майбутніх партій у 4 рази більша за кількість усіх гравців в обох командах. Однак через хворобу два гравці не змогли з’явитися на матч, у зв’язку з чим кількість усіх зіграних у матчі партій виявилося на 17 менше за передбачувану. Скільки гравців виступило в матчі за команду *А*, коли відомо, що в ній було менше гравців, ніж у команді *В*?

* Позначимо кількість гравців, які мали виступити відповідно за команди *А* і *В*,через *т* і *п *

Очевидно, що планувалося зіграти *тп* партій. Перша умова задачі приводить до рівняння

**

Друге рівняння відразу записати не можна, оскільки невідомо, до яких команд належали захворілі гравці. Можливі три випадки:

1) якщо занедужали гравці команди *А*, то



2) якщо занедужали гравці команди *В*, то



3) якщо занедужало по одному гравцю з команд *А* і *В*, то



Перший випадок дає  що неможливо, оскільки *п* — ціле число. Другий випадок також неможливий з цієї причини:  У третьому випадку дістаємо систему



Звідси легко знаходимо  

*Відповідь.* За команду *А* виступило 5 гравців.



**1.** Покупець придбав кілька однакових зошитів і однакових книг, причому книг він купив на 4 штуки більше, ніж зошитів. За всі зошити він заплатив 72 коп., а за всі книги — 6 грн 60 коп. Якби зошит коштував стільки, скільки коштує книга, а книга — стільки, скільки коштує зошит, то покупець витратив би на покуп­ку менше, ніж 4 грн 44 коп. Скільки куплено зошитів?

*Відповідь.* 2 зошити.

**2.** Василь і Петро поділили між собою 39 горіхів. Кількість горіхів, що дісталися кожному з них, менша від подвоєного числа горіхів, що дісталися іншому. Квадрат третини числа горіхів, що дісталися Петрові, менший збільшеного на 1 числа горіхів, що дісталися Василеві. Скільки горіхів у кожного?

*Відповідь.* 14 і 25 горіхів.

**3.** Маємо однакові набори поштових марок, що складаються з гашених і негашених марок, причому в кожному наборі кількість гашених марок більше ніж на 2 перевищує кількість негашених. Якщо в кожному наборі кількість гашених марок збільшити в 4 рази, а кількість негашених залишити без зміни, то кількість гашених марок в одному наборі перевищить кількість негашених не більш ніж на 20, а загальна кількість марок у всіх наявних наборах дорівнюватиме 44. Визначити кількість наявних наборів і кількість гашених і негашених марок у кожному наборі.

*Відповідь.* 2 набори, що складаються з 5 гашених і 2 негашених марок кожний.

**4.** Біля будинку посаджено липи і берези, причому загальна їхня кількість більша за 14. Якщо збільшити вдвічі кількість лип, а кількість беріз збільшити на 18, то беріз стане більше, ніж лип. Якщо збільшити вдвічі кількість беріз, не змінюючи кількості лип, то лип усе одно буде більше, ніж беріз. Скільки лип і скільки беріз було посаджено?

*Відповідь.*11 лип і 5 беріз.

**5.** У кіоску було продано однакові комплекти, що складаються тільки із синіх і червоних олівців, причому в кожному комплекті кількість синіх олівців більш ніж на 3 перевищувала кіль­кість червоних. Якби в кожному комплекті кількість синіх олівців збільшили в три рази, а червоних — у два рази, то кількість синіх олівців в одному комплекті перевищувала б кількість червоних не більш ніж на 16, а загальна кількість усіх проданих олівців дорівнювало б 81. Визначити, скільки було продано комплектів і скільки було в кожному комплекті синіх і червоних олівців.

*Відповідь.* 3 комплекти по 7 синіх і 3 червоних олівці.

**6.** Група студентів, що складається з 30 осіб, одержала на іспиті оцінки 2, 3, 4 і 5. Сума отриманих оцінок дорівнює 93, причому «трійок» було більше, ніж «п’ятірок», і менше, ніж «четвірок». Крім того, число «четвірок» ділилося на 10, а число «п’ятірок» було парним. Визначити, скільки яких оцінок одержала група.

*Відповідь.* 11 «двійок», 7 «трійок», 10 «четвірок», 2 «п’ятірки».

**7.** У навчальному корпусі на кожному поверсі знаходиться однакова кількість аудиторій. Усього в корпусі 96 аудиторій, і площа кожної з них дорівнює 46 м2. При будівництві корпуса сумарні витрати на земляні роботи, оздоблення й устаткування ауди­торій не перевищили 252 720 грн, причому на опоряджувальні роботи було витрачено по 2760 грн на кожний поверх будівлі, на устаткування аудиторій — по 2000 грн на кожну аудиторію, і на земляні роботи на відведеній під будівництво ділянці землі — по 1 грн на 1 м2 земельної ділянки. Відомо, що площа ділянки землі не перевершує 2550 м2, а загальна площа всіх аудиторій одного поверху в 5 разів менша, ніж площа земельної ділянки. Скільки поверхів у корпусі?

*Відповідь.* 12.

5.6. Задачі, в яких потрібно знаходити найбільші і найменші значення деяких виразів

В особливу групу можна виділити задачі, для розв’язування яких необхідно знайти екстремум тієї чи іншої функції, тобто визначити, при яких значеннях невідомої ця функція досягає найбіль­шого чи найменшого значення. Відмітна риса кожної такої задачі полягає в тому, що одна чи кілька умов у її формулюванні, що дозволяють дістати або додаткове рівняння, або виділити єдиний розв’язок з багатьох можливих, становлять задачу на відшукання найбільшого чи найменшого значення деякої функції.

Розглянемо кілька прикладів.

**Задача.** Три бригади мають виконати роботу. Перша бригада виготовляє за день 200 деталей, друга — на  деталей мен­ше, ніж перша  а третя — на  деталей більше, ніж перша. Спочатку перша і друга бригади, працюючи разом, виконують 1/5 усієї роботи, а потім усі три бригади, працюючи разом, виконують 4/5 роботи, що залишилися. На скільки деталей у день менше має виготовляти друга бригада, ніж перша, щоб усю роботу було виконано зазначеним способом якомога швидше?

* З умови задачі випливає, що друга бригада виготовляє на день  деталей, а третя бригада — на  деталей. Якщо позначити через  загальну кількість деталей, яку потрібно виготовити, то час усієї роботи складається з двох частин:



— часу роботи окремо першої і другої бригад;



— часу спільної роботи бригад, так що



Таким чином, час усієї роботи є функцією тільки однієї змінної *.*

Знайдемо, при якому значенні  функція досягає мінімуму. Для цього прирівняємо похідну функції  донуля:



З цього рівняння знаходимо  Легко побачити, що  при  Отже, при  функція  справді досягає мінімуму.

Цей самий результат можна було б дістати, не вдаючись до диференціювання. Оскільки чисельник дробу не залежить від то значення цієї функції визначається величиною знаменника, що є квадратичною функцією від Добре відомо, що квадратична функція



графіки якої наведено на рисунку має точку максимуму при  і точку мінімуму при  В обох випадках екстремум досягається при 



Очевидно, що *t* буде найменшим, якщо знаменник



дробу буде найбільшим, тобто при  причому це значення знаходиться в допустимому для даної задачі інтервалі: 

Отже, роботу буде виконано за найменший час, якщо друга бригада виготовлятиме на 125 деталей за день менше, ніж перша.

*Відповідь.*  деталей.

**Задача.** Студентка біологічного факультету проводила експерименти з вирощування бактерій у поживному середовищі. При цьому вона помітила, що швидкість збільшення кількості бактерій у будь-який момент часу пропорційна до числа бактерій, що існують у цей момент часу, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює 0,5 (час вимірюється в годинах). За завданням необхідно виростити колонію бактерій чисельністю понад 20 000 одиниць. Який найменший час вирощування колонії бактерій зазначеної чисельності, коли відомо, що спочатку в живильне середовище було поміщено 200 бактерій?

* Позначимо чисельність колонії бактерій у довільний момент часу  через Тоді швидкість зростання колонії визначається похідною від кількості бактерій за часом. Умова задачі приводить до рівняння

 (1)

яке має задовольняти функція 

На відміну від рівнянь, що зустрічалися нам при розборі задач попередніх підрозділів, у це рівняння входить невідома функція, причому не тільки вона сама, але і її похідна. Таке рівняння являє собою приклад *диференціальних рівнянь*, що мають важливе значення в багатьох галузях знань.

Безпосереднім підставленням можна переконатися, що диференціальне рівняння (1) має розв’язок виду

 (3)

де  — довільний сталий коефіцієнт, причому відомо, що формула (2) вичерпує *всю множину розв’язків* цього рівняння.

Для визначення невідомого коефіцієнта використовується *початкова умова*, що є в задачі, а саме: при  кількість уміщених у середовище бактерій  дорівнює 200. Використовуючи розв’язок (2), дістаємо

,

звідки знаходимо, що . Таким чином, кількість бактерій у поживному середовищі змінюється за законом 

За умовою задачі необхідно знайти найменший час  такий що  Отже,



або



Відповідь: 9,2 год.



**1.** По двох взаємно перпендикулярних дорогах у напрямі до перехрестя рухаються два автомобілі зі швидкостями  і  Визначити мінімальну в процесі руху відстань між автомобілями, якщо в початковий момент часу їхні відстані від перехрестя становили відповідно і .

*Відповідь.* 

**2.** Автомобіль їде від пункту *А* до пункту *В* зі сталою швидкі­стю 42 км/год. У пункті *В* він переходить на рівносповільнений рух, причому за кожну годину його швидкість зменшується на  км/год, і їде так до повної зупинки. Потім він відразу ж починає рухатися рівноприскорено з прискоренням *а* км/год2. Яким має бути значення *а*, щоб через 3 год після поновлення руху автомобіль знаходився найближче до пункту *В*?

*Відповідь. *

**3.** Вантажний ліфт спускається з вежі висотою 320 м. Спочатку він рухається зі швидкістю 20 м/с, а потім його швидкість миттєво досягає 50 м/с. Через деякий час після початку руху ліфта з вершини вежі скидають камінь, який здійснює вільне падіння і досягає землі одночасно з ліфтом. Відомо, що в процесі руху камінь був увесь час вище від ліфта, причому максимальна різниця висот між ними становила 60 м. У момент перемикання швидкості ліфта швидкість каменя перевищувала 25 м/с, але була меншою від 45 м/с. Визначити, через який час після початку руху ліфта скинули камінь. При розв’язуванні задачі прискорення віль­ного падіння вважати таким, що дорівнює 10 м/с2.

*Відповідь.* 2 с.

**5.** Дехто найняв пароплав для перевезення вантажів на відстань у 1000 км. Він пропонує плату власникові пароплава в розмірі 1500 золотих монет, але вимагає повернути 9 золотих монет за кожну годину перебування пароплава в дорозі. Передбачається, що пароплав буде рухатися зі сталою швидкістю. Якщо ця швидкість дорівнюватиме км/год., то наприкінці шляху власник зобов’язаний виплатити команді премію, що дорівнює золотим монетам. З якою швидкістю власник має вести пароплав, щоб заробити максимальну кількість золотих монет? Яка це кількість?

*Відповідь.* 30 км/год; 900 монет.

**6.** Потрібно побудувати кілька однакових житлових будинків із загальною площею 40 тис. м2. Витрати на будівництво одного будинку, що має  м2 житловою площі, складаються з вартості наземної частини, пропорційної до і вартості фундаменту, пропорційної до Будівництво будинку площею 1600 м2 коштує 184,8 тис. грн, причому в цьому випадку вартість наземної частини становить 32 % вартості фундаменту. Визначити, скільки потрібно побудувати будинків, щоб сума витрат була найменшою; знайти цю суму.

*Відповідь.*  тис. грн; 8 будинків.

**7.** Потяг, що вирушає з пункту *А* в пункт *В*, робить на шляху кілька зупинок. На першій зупинці в потяг сідає 5 пасажирів, а на кожній наступній — на 10 пасажирів більше, ніж на попередній зупинці. На кожній зупинці 50 пасажирів виходять з потяга. Чи можливий випадок, коли в пункт *В* приїде менше 12 пасажирів, якщо з пункту *А* їх виїжджає 462?

*Відповідь.* Неможливий.

**8.** Деяке підприємство завдає збитків, що становлять 31 тис. грн за рік. Для перетворення його в рентабельне було запропоновано збільшити асортимент продукції. Підрахунки показали, що додаткові доходи, що припадають на кожний новий вид продукції, становитимуть 25 тис. грн за рік, а додаткові витрати досягають 5 тис. грн у рік при освоєнні одного нового виду, але освоєння кожного наступного потребуватиме на 10 тис. грн за рік більше витрат, ніж освоєння попереднього. Чи можна зазначеним способом зробити підприємство рентабельним?

*Відповідь.* Не можна.

**9. *(Задача про дієту).***Дієта має забезпечувати щодобову потребу організму не менш ніж у 36, 40 і 12 одиницях деяких мікроелементів   і  відповідно. Для задоволення цієї потреби вирішено використовувати два види продуктів  і  Вміст мікроелементів   і у цих продуктах (у 1 г) дано в таблиці:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *M*1 | *М*2 | *М*2 |
| *П*1 | 6 | 10 | 6 |
| *П*2 | 18 | 10 | 2 |

Відомо, що вартість 5 г продукту дорівнює вартості 8 г продукту . Визначити, яку кількість продукту і продукту  потрібно використовувати, щоб задовольнялася щодобова потреба організму в мікроелементах і щоб загальна вартість харчування була мінімальна.

*Відповідь.* 1 г і 3 г.