3.1 АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ ТА ІХ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Основні поняття та формули

В алгебрі вивчаються дії з числовими та буквеними величинами, а також розв’язання рівнянь, пов’язаних із цими діями. При цьому буквеним величинам можуть надаватися конкретні числові значення.

***Одночленом*** називається добуток кількох співмножників, що є числами або буквами.

***Приклад :***  3ax 2 , -2a 3 , 0,5c 3 ( -3b 2 ) - одночлени;  
x + 1 , a 2 + b 4 ,  http://www.nam.kiev.ua/olymp/testmath/help_013/image/h_06.gif  *- не є одночленами, бо являють собою суму або частку змінних та чисел*.

Окремі числа і букви також вважаються одночленами. Наприклад, 2*bху*, –3*х*2*z*5, 6, *у* — одночлени.

***Многочленом*** називається сума одночленів. Наприклад, 2*bху* + + 7*х*2 + 3 — многочлен.

***Приклад :***  2а 2 - 3ах 5 - 3 - *многочлен*;  
http://www.nam.kiev.ua/olymp/testmath/help_013/image/h_07.gif *- не є многочленом, бо він є часткою одночленів.*

**Сума та різниця многочленів**

**1.**  *Для того, щоб перетворити суму або різницю одночленів в многочлен стандартного виду, потрібно: а) розкрити дужки; б) привести подібні члени (доданки):*

***Приклад :***  ( 5х 2 - 4х + 3 ) - ( 3х 2 - х + 2 )= 5х 2 - 4х + 3 - 3х 2 + х - 2 = 2х 2 - 3х +1 .

**Множення многочленів**

**1.**  *Для того, щоб помножити многочлен на мгогочлен, потрібно кожен член першого многочлена помножити на кожний член другого та скласти отримані добутки.*

***Приклад :***  5х ( х - у ) + 2 ( х + у )( х - у ) = 5х 2 - 5ху + 2х 2 - 2ху + 2ху - 2у 2 = 7х 2 - 5ху - 2у 2 .

**Розклад многочлена на множники**

***1 спосіб:****винесення спільного множника за дужки.*

***Приклад :***  3ах 4 - 6а 7х 7 + 12ах 3 = 3ах 3 ( х - 2а 6х 4 + 4 ).

***2 спосіб:****спосіб групування.*

***Приклад :***  ах + 2а - 3х - 6 = ( ах + 2а ) + ( -3х - 6 ) = а ( х + 2 ) - 3 ( х + 2 ) = ( х + 2 )( а - 3 ).

***Приклад :***  3 ( х - 2у ) 2 - 3х + 6у = 3 ( х - 2у ) 2 -3 ( х - 2у ) = 3 ( х - 2у )( х - 2у - 3 ) .

Основу всіх алгебраїчних дій становлять такі закони додавання і множення:

***Переставний закон:***

*а* + *b* = *b* + *а*, *аb* = *bа*.

***Сполучний закон:***

(*а* + *b*) + *c* = *а* + (*b* + *с*), (*аb*)*c* = *а*(*bс*).

***Розподільний закон:***

(*а* + *b*)*c* = *аc* + *bс*.

При виконанні перетворень алгебраїчних виразів використовуються такі підходи:

**1. *Зведення подібних членів*.** Якщо кілька доданків мають однакові буквені частини, то їхні числові коефіцієнти додаються, а буквена частина зберігається. Наприклад, 9*а*2*b* – 3а2*b* – 4*а*2*b* = (9 – – 3 – 4)*a*2*b* = 2*a*2*b*.

**2. *Винесення множника*** *за дужки* здійснюється на основі розподільного закону і правил дій зі степенями. Наприклад, 4*ax*2*y* + + 3*а*2*bху*2 – 2*abx*2 = *ax*(4*xy* + 3*aby*2 – 2*bx*2).

**3. *Розкриття дужок*** також здійснюється за допомогою розподільного закону. Необхідно пам’ятати, якщо множник перед дужками має від’ємний знак, то при їхньому розкритті змінюються знаки всіх доданків. Приклади:

2*mn*2(*mx* – 3*уn*3 + 5) = 2*m*2*n*2*x* – 6*mn*5*у* + 10*mn*2;

–*ab*(3*a* – 2*b* + 4) = –3*a*2*b* + 2*ab*2 – 4*ab*.

**4. *Формули скороченого множення*:**

(*а* + *b*)2 = *а*2 + 2*аb* + *b*2,

(*а* – *b*)2 = *а*2 – 2*аb* + *b*2,

(*а – b*)(*а* + *b*) = *а*2 – *b*2,

(*а* + *b*)3 = *а*3 + 3*a*2*b* + 3*аb*2 + *b*3,

(*а – b*)3 = *а*3 – 3*а*2*b* + 3*аb*2 – *b*3,

(*а* + *b*)(*а*2 – *ab* + *b*2) = *а*3 + *b*3,

(*а* – *b*)(*а*2 + *ab* + *b*2) = *а*3 – *b*3.

Ділення многочленів

Однією із важливих вій в алгебрі є дія ділення многочленів.

Розглянемо ділення многочлена   на многочлен  степеня 



де  — натуральні числа. Ділення можливе, якщо степінь многочлена-діленого  не менший за степінь многочлена-дільника  тобто коли  і  — не нуль-многочлен.

Поділити многочлен  на многочлен   — означає знайти два таких многочлени  і  щоб

 (1)

При цьому многочлен  степеня  називають *многочленом-часткою*,  — *многочленом-остачею*.

Якщо дільник  — не нуль-многочлен, то ділення  на   завжди виконуване, а частка і остача визначаються остаточно.

У тому разі, коли  при всіх  тобто  кажуть, що многочлен  ділиться (або націло ділиться) на многочлен 

Для ділення многочлена, що залежить від однієї змінної *х*, на многочлен меншого степеня використовують такий алгоритм *ділення стовпчиком*:

1. Розмістити доданки в многочленах у порядку спадання степеня змінної.

2. Поділити перший доданок діленого многочлена на перший доданок дільника і результат написати в частку.

3. Помножити результат на дільник і відняти його від ді-  
леного.

4. Виконати зі здобутим після віднімання многочленом дії згід­но з п. 2 і 3.

Повторювати зазначені операції доти, доки після віднімання не дістанемо або нуль, або многочлен степеня, меншого, ніж у дільника. Цей многочлен називається *остачею*.

**Приклад.** Виконати ділення многочленів:

(12*х*2 – 5*х* – 7*х*3 + 3 + 3*х*4) : (3 + *х*2 – 2*х*).

* 1. Розмістимо доданки в многочленах у порядку спадання степенів змінної *х*:

12*х*2 – 5*х* – 7*х*3 + 3 + 3*х*4 = 3*х*4 – 7*х*3 + 12*х*2 – 5*х* + 3 — ділене;

3 + *х*2 – 2*х* = *х*2 – 2*х* + 3 — дільник.

2. Поділимо перший член діленого 3*х*4 на перший член дільника *х*2. У результаті знайдемо перший член частки 3*x*2.

3. Помножимо 3*х*2 на дільник і здобутий результат 3*x*4 – 6*х*3 +  
+ 9*х*2 віднімемо від діленого. Дістанемо –*х*3 + 3*x*2 – 5*х* + 3.

4. Поділимо перший член результату –*х*3 на перший член дільника *х*2 і знайдемо –*х* — другий член частки.

5. Помножимо другий член частки на дільник і знайдений добуток –*х*3 + 2*х*2 – 3*х* віднімемо від результату п. 3. Дістанемо *х*2 –  
– 2*х* + 3.

6. Поділимо результат *х*2 – 2*х* + 3 на дільник *х*2 – 2*х* + 3. Дістанемо 1 — третій член частки. Остача від ділення дорівнює 0.

Запишемо ділення у вигляді:



Отже, дістали відповідь: 3*x*2 – *х* + 1.

**Приклад.** Алгоритм ділення многочленів:



Отже, згідно з (1) можемо записати:



Розглянемо ділення з остачею многочлена   де   …,   — задані числа, на двочлен 

Згідно з (1) дістаємо:

 (2)

де  — частка;  — остача. Оскільки степінь многочлена-остачі має бути меншим за степінь многочлена-дільника  тобто менший від одиниці, то остача  — деяке число.

Знайдемо коефіцієнти   …,  частки 

Рівність (2) запишемо у вигляді



і виконаємо множення у правій частині:



Сума здобутого многочлена і остачі  має тотожно дорівнювати многочлену 

Два многочлени, одного й того самого степеня відносно змінної  задані у стандартному вигляді, вважають рівними між собою, коли тотожно рівні коефіцієнти їх подібних членів.

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степеня *х* змінної  здобутого многочлена і многочлена  маємо:

   …,   
 

Звідси послідовно знаходимо коефіцієнти многочлена 

   …, 

Щоб знайти коефіцієнти многочлена-частки  зручно скористатися методом, який називають ***схемою Горнера.*** Цей метод полягає ось у чому.

У верхньому рядку записують послідовно всі коефіцієнти многочлена-діленого. У нижньому рядку на одну позицію ліворуч від *an* записують число *с*. Заповнюючи нижній рядок, ураховують, що старший коефіцієнт многочлена-частки дорівнює старшому коефіцієнту многочлена-діленого, а тому під старшим коефіцієнтом многочлена-діленого записують цей самий коефіцієнт. Кожне наступне число нижнього рядка знаходять додаванням до відповідного коефіцієнта верхнього рядка добутку попереднього числа нижнього рядка і числа *с*. В останній позиції ниж­нього рядка під вільним членом многочлена-діленого дістаємо остачу. Усі числа нижнього рядка, крім числа *с*, є коефіцієнтами многочлена-частки.

У розглядуваному випадку ділення многочлена  на  схема Горнера матиме такий вигляд:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *an* | *an* – 1 | *an –* 2 | … | *a*1 | *a*0 |
| *с* | *bn –* 1 = *an* | *bn* – 2 =  = *an* – 1 +*cbn* – 1 | *bn* – 3 = *an* – 2 + + *cbn* – 2 | … | *b*0 = *a*1 + *cb*1 | *R* = *a*0 + *cb*0 |

**Приклад.** Знайти частку і остачу при діленні многочлена  на двочлен 

* Складемо схему Горнера (тут ):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 6 | – 16 | – 12 | 3 |
| –2 | 6 | –16 + 6 ⋅ (–2) = – 28 | –12 + (–28) ⋅ (–2) = 44 | 3 +44 ⋅ (–2) = –85 |

Маємо, числа 6, –28 і 44 — шукані коефіцієнти частки. Отже, частка подається у вигляді  а остача дорівнює –85.

Розглянемо теорему, яка дає змогу знаходити остачу  від ділення многочлена  на двочлен  не виконуючи самого ділення.

***Теорема (Безу). Остача від ділення многочлена  на двочлен  дорівнює значенню многочлена при  тобто ***

Справді виконавши ділення многочлена  на двочлен  дістанемо (згідно з (2))  де остача  — деяке число.

Вважаючи  маємо   Таким чином, 

***Приклад.*** Знайти остачу від ділення многочлена  на двочлен 

Для знаходження остачі  обчислимо значення многочлена при 

 Шукана остача 

*Зауваження.* Остача від ділення многочлена  на двочлен   дорівнює .

**Наслідок.** Для подільності многочлена  на двочлен  необхідно і достатньо, щоб число *с* було коренем многочлена 

Покажемо, що коли многочлен  ділиться на  то  — корінь многочлена  тобто що умова необхідна.

Справді, якщо  ділиться на  то остача  Водночас (за теоремою Безу),  Отже,  а це означає (за означенням), що  — корінь многочлена 

Умова достатня, оскільки якщо  — корінь многочлена  то (за означенням)  Водночас (за теоремою Безу),  Отже,  тобто  ділиться на 

З теореми Безу випливають і інші наслідки. Сформулюємо їх без доведення.

1. Якщо  — різні корені многочлена  то многочлен  ділиться на добуток 

2. Якщо  то кількість різних коренів многочлена  не перевищує його ступеня.

3. Якщо  — усі корені многочлена   то .

4. Многочлен  ділиться на двочлен  при будь-якому натуральному 

5. Многочлен  ділиться на двочлен  при будь-якому парному 

6. Многочлен  ділиться на двочлен  при будь-якому непарному 

Многочлен зі старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, називають *зведеним многочленом.*

Для відшукання коренів многочленів можна скористатися такими теоремами.

***Теорема (про дробові корені).* Зведений многочлен із цілими коефіцієнтами не може мати дробових раціональних коренів.**

***Теорема (про цілі корені).* Кожний цілий корінь многочлена з цілими коефіцієнтами є дільником вільного члена.**

**Приклад.** Знайти корені многочлена 

* Спочатку спробуємо знайти цілі корені цього многочлена. Згідно з теоремою про цілі корені такими коренями можуть бути лише дільники вільного члена, тобто числа 1 і –1. Дослідимо чис­ло  Таким чином, чис­ло –1 не є коренем многочлена. Дослідивши число 1, дістанемо  а отже, число 1 — цілий корінь многочлена.

Згідно з наслідком із теореми Безу даний многочлен ділиться на двочлен  Визначимо частку від ділення даного многочле­на на  Коефіцієнти частки знайдемо за схемою Горнера:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 6 | –11 | 6 | –1 |
| 1 | 6 | –5 | 1 | 0 |

#### Отже, Оскільки числа і — корені тричлена то даний многочлен має три корені: 1, і .