# Проективна геометрія

**Проективна геометрія** — розділ [геометрії](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F), який вивчає [проективні площини](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%B0_%D0%BF%D0%BB%D0%BE%D1%89%D0%B8%D0%BD%D1%83&action=edit&redlink=1) та [проективний простір](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96%D1%80).

Головна особливість проективної геометрії полягає в принципі [дуальності](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%83%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C), який додає витончену симетрію для багатьох конструкцій. Проективна геометрія може вивчатися як з чисто геометричної точки зору, так з [аналітичної](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%96%D0%B7) (за допомогою [однорідних координат](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9E%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%80%D1%96%D0%B4%D0%BD%D1%96_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%B8&action=edit&redlink=1)) і з [алгебраїчної](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0), розглядаючи проективну площину як структуру над [полем](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%B5_%28%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%29). Часто, і історично, дійсна проективна площина розглядається як Евклідова площина з додаванням «прямої у нескінченності».

Проективна геометрія доповнює Евклідову, надаючи красиві і прості рішення для багатьох завдань, ускладнених присутністю паралельних прямих. Особливо проста й витончена проективна теорія [конічних перетинів](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%96%D1%87%D0%BD%D1%96_%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%B8%D0%BD%D0%B8).

## Історія

Хоча деякі результати, які тепер зараховані до проективної геометрії, виходять з робіт таких давньогрецьких геометрів, як [Папп Александрійський](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%B0%D0%BF%D0%BF_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D1%96%D0%B9%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9&action=edit&redlink=1), проективної геометрії як така народилася в [XVII століття](http://uk.wikipedia.org/wiki/XVII_%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%BB%D1%96%D1%82%D1%82%D1%8F) з [прямої перспективи](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%B0) в живописі і архітектурному кресленні. Ідея безмежно далеких точок, в яких перетинаються паралельні прямі, з'явилася незалежно у французького архітектора [Жерара Дезарга](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%96%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%80_%D0%94%D0%B5%D0%B7%D0%B0%D1%80%D0%B3%D0%B0&action=edit&redlink=1) і у німецького астронома [Йоганна Кеплера](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%99%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D0%BD%D0%BD_%D0%9A%D0%B5%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D1%80). Дезарга навіть запропонував, що може існувати пряма, що складається виключно з нескінченно віддалених точок.

В [XIX столітті](http://uk.wikipedia.org/wiki/XIX_%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%BB%D1%96%D1%82%D1%82%D1%8F) інтерес до цієї області відродився завдяки працям [Жана-Віктора Понселе](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%96%D0%B0%D0%BD-%D0%92%D1%96%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80_%D0%9F%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%B5%D0%BB%D0%B5&action=edit&redlink=1) та [Мішеля Шаля](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D1%96%D1%88%D0%B5%D0%BB%D1%8C_%D0%A8%D0%B0%D0%BB%D1%8C&action=edit&redlink=1). Понселе вивів проективний простір з Евклідового, додавши пряму в нескінченності, на якій перетинаються всі площини, паралельні даній, і довів принцип дуальності. Шаль продовжив і значно поглибив праці Понселе. Пізніше [Карл фон Штаудта](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%BB_%D1%84%D0%BE%D0%BD_%D0%A8%D1%82%D0%B0%D1%83%D0%B4%D1%82%D0%B0&action=edit&redlink=1) створив чисто синтетичну аксіоматизацію, об'єднуючи ці прямі з рештою.

У кінці [XIX століття](http://uk.wikipedia.org/wiki/XIX_%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%BB%D1%96%D1%82%D1%82%D1%8F) [Фелікс Клейн](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B5%D0%BB%D1%96%D0%BA%D1%81_%D0%9A%D0%BB%D0%B5%D0%B9%D0%BD) запропонував використовувати для проективної геометрії [однорідні координати](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9E%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%80%D1%96%D0%B4%D0%BD%D1%96_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%B8&action=edit&redlink=1), які раніше запровадили [Мебіус](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B2%D0%B3%D1%83%D1%81%D1%82_%D0%A4%D0%B5%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BD%D0%B4_%D0%9C%D0%B5%D0%B1%D1%96%D1%83%D1%81), [Плюккер](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%AE%D0%BB%D1%96%D1%83%D1%81_%D0%9F%D0%BB%D1%8E%D0%BA%D0%BA%D0%B5%D1%80), і [Фейєрбах](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%BB_%D0%92%D1%96%D0%BB%D1%8C%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BC_%D0%A4%D0%B5%D0%B9%D1%94%D1%80%D0%B1%D0%B0%D1%85&action=edit&redlink=1).

## Термінологія

Основні, залишені без визначення в стандартній аксіоматизації, поняття проективної геометрії — це [точка](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_%28%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F%29&action=edit&redlink=1) та [пряма](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%B0). Сукупність точок на прямій називається **рядом**, а сукупність прямих, що проходять крізь точку — **пучком**. Сукупність точок на прямих у пучку *A*, що перетинаються з прямою *BC*, визначає [**площину**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%BE%D1%89%D0%B8%D0%BD%D0%B0_%28%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F%29) *ABC*. **Принцип дуальності** свідчить, що будь-яка конструкція проективної геометрії в *n*-вимірному просторі залишається вірною, якщо в усіх випадках замінити (*k*)-вимірні конструкції на (*n*- *k*-1)-вимірні. Так, будь-яка конструкція в проективній площині залишається вірною, якщо замінити точки на прямі і прямі на точки.

Перетворення ряду прямих *X* в пучок точки *x*, що не знаходиться в цьому ряду, або навпаки, ідентифікує кожну точку в ряді з прямою з пучка, що її перетинає, і позначається *X*⌅*x* . Послідовність з декількох таких перетворень (з ряду в пучок, потім назад в ряд, і так далі) називається **проективністю'*.*** *Перспективність****— це послідовність з двох проективностей (пишеться*X*⌆*X**). Перспективність двох прямих проходить крізь **центр** *O*, а перспективність двох точок — крізь **вісь** *o*. Точка **інваріантна** по відношенню до проективності, якщо проективність перетворює її в ту ж точку.

[**Трикутник**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B8%D0%BA%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA)  — це три точки, з'єднані попарно прямими. **Повний** [**чотирикутник**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%BE%D1%82%D0%B8%D1%80%D0%B8%D0%BA%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA)  — це чотири точки (вершини) в одній площині, з яких жодні три не [колінеарними](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D1%96%D0%BD%D0%B5%D0%B0%D1%80%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C), з'єднані попарно прямими. Перетин двох із цих прямих, які не є вершинами, називається **діагональною точкою**. **Повний чотирикутник** визначається аналогічно, але з точками замість прямих і прямими замість точок. Аналогічно можна визначити **повний*n*-кутник** і **повний*n*-гранник**.

Два трикутники **перспективні** якщо вони можуть бути з'єднані за допомогою перспективності, тобто їх грані перетинаються на [колінеарними точках](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D1%96%D0%BD%D0%B5%D0%B0%D1%80%D0%BD%D1%96_%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B8&action=edit&redlink=1) (перспективність крізь пряму) або їх вершини з'єднані [конкурентними прямими](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%BA%D1%83%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BD%D1%96_%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%BC%D1%96&action=edit&redlink=1) (перспективність крізь точку).

## Основні підходи

Є три головних підходи до проективної геометрії: незалежна [аксіоматизація](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BA%D1%81%D1%96%D0%BE%D0%BC%D0%B0), доповнення Евклідової геометрії, і структура над полем.

### Аксіоматизація

[Проективний простір](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96%D1%80) можна визначити за допомогою різного набору аксіом. Коксетер надає наступні:

1. Існує пряма і точка не на ній.
2. На кожній прямий є принаймні три точки.
3. Через дві точки можна провести рівно одну пряму.
4. Якщо *A*, *B*, *C*, і *D* — різні точки і *AB* і *CD* перетинаються, то *AC* і *BD* перетинаються.
5. Якщо *ABC* — площина, то існує принаймні одна точка не в площині *ABC*.
6. Дві різні площини перетинаються принаймні в двох точках.
7. Три діагональні точки повного чотирикутника не є колінеарними.
8. Якщо три точки на прямій *X* інваріантні по відношенню до проективної φ, то всі точки на *X* інваріантні по відношенню до φ.

[Проективна площина](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%B0_%D0%BF%D0%BB%D0%BE%D1%89%D0%B8%D0%BD%D0%B0&action=edit&redlink=1) (без третього виміру) визначається дещо іншими аксіомами:

1. Через дві точки можна провести рівно одну пряму.
2. Будь-які дві прямі перетинаються.
3. Існує чотири точки, з яких немає трьох колінеарних.
4. Три діагональні точки повних чотирикутників не є колінеарними.
5. Якщо три точки на прямій *X* інваріантні по відношенню до проективної φ, то всі точки на *X* інваріантні по відношенню до φ.
6. [Теорема Дезарга](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%94%D0%B5%D0%B7%D0%B0%D1%80%D0%B3%D0%B0): Якщо два трикутника перспективні крізь точку, то вони перспективні крізь пряму.

При наявності третього виміру, теорема Дезарга може бути доведена.

### Доповнення Евклідової геометрії

Історично, проективний простір був вперше визначено, як доповнення [евклідового простору](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D1%96%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96%D1%80) ідеальним елементом — нескінченно віддаленої площини. Кожна точка на цій площині відповідає напрямку в просторі і є місцем перетину всіх прямих цього напрямку.

### Структура над полем

*N*-вимірний проективний простір над [полем](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%B5_%28%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%29) *F* визначається за допомогою системи [однорідних координат](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9E%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%80%D1%96%D0%B4%D0%BD%D1%96_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%B8&action=edit&redlink=1) над *F*, тобто множини ненульових (*n*+1) — [векторів](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80) з елементів *F*. Точка і пряма визначаються як множина векторів, що відрізняються множенням на константу. Точка *x* знаходиться на прямій *X* якщо [скалярний добуток](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%B4%D0%BE%D0%B1%D1%83%D1%82%D0%BE%D0%BA) *X* ⋅ *x* = 0. Таким чином, маючи пряму *X*, ми можемо визначити [лінійне рівняння](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5_%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D0%BD%D1%8F) *X* ⋅ *x* = 0, що визначає ряд точок на *X* . З цього випливає, що точки *x*, *y*, і *z* є колінеарними, якщо *X* ⋅ *x* = *X* ⋅ *y* = *X* ⋅ *z* = 0 для будь-якої прямої *X*.