# Група

**Група,** одне з основних понять сучасної математики. Теорія **Груп** вивчає в найзагальнішій формі властивості дій, що найчастіше зустрічаються в математиці і її застосуваннях (приклади таких дій — множення чисел, складання векторів, послідовне виконання перетворень і т. п.). Спільність теорії Р., а в той же час і широта її застосувань забезпечуються тим, що вона вивчає властивості дій в їх чистому вигляді, відволікаючись як від природи елементів, над якими виконується дія, так і від природи самої дії. В той же час теорія Р. вивчає не зовсім довільні дії, а лише ті, які володіють рядом основних властивостей, що перераховуються у визначенні Р. (див. нижчий).

  До поняття **Груп** можна прийти, наприклад, досліджуючи симетрію геометричних фігур. Так, квадрат представляється симетричною фігурою, оскільки, наприклад, його поворот j біля центру на 90° за годинниковою стрілкою або [*дзеркальне віддзеркалення*](http://vseslova.com.ua/word/%D0%94%D0%B7%D0%B5%D1%80%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B5_%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%B4%D0%B7%D0%B5%D1%80%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F-38271u) *в* відносно діагоналі *AC* не змінюють його положення; всього існують 8 різних [*рухів*](http://vseslova.com.ua/word/%D0%A0%D1%83%D1%85_%28%D1%83_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%97%29-29432u)*,* що поєднують квадрат з собою. Для круга ( ***мал. б*** ) таких рухів, очевидно, вже нескінченно багато — такі, наприклад, всі його повороти біля центру. А для фігури змальованою на ***мал. в*** , існує лише один рух, що поєднує її з [http://vseslova.com.ua/images/bse/0002/28080/1.jpg](http://vseslova.com.ua/images/bse/0002/28080/1_big.jpg)собою, — тотожне, тобто що залишає кожну точку фігури на місці.

  Безліч *G* різних рухів, що самосовмещающих дану фігуру, і служить характеристикою більшої або меншої її симетричності: чим більше безліч *G* , тим симметрічнєє фігура. Визначимо на безлічі *G* композицію, тобто дія над елементами з *G* за наступним правилом: якщо *j,y* — два рухи з *G* , то результатом їх композиції (інколи говорять «твором» *j* і *в* ) називається рух joy, рівносильне послідовному виконанню спочатку руху j, а потім рухи в. Наприклад, якщо j, в — рухи квадрата, вказані вище, то joy — віддзеркалення квадрата відносно осі, що проходить через середини сторін *AB* і *CD.* Безліч рухів *G* , узяте з визначеною на нім композицією, називається групою симетрії даної фігури. Очевидно, композиція на безлічі *G* задовольняє наступним умовам: 1) (j○y)○q = j○ (y○q) для будь-яких j, в, q з *G* ; 2) у *G* існує такий елемент e, що e○j = j○e = j для будь-якого j з *G* ; 3) для будь-якого j з *G* існує в *G* такий елемент j -1 , що j○j -1 =  j -1 ○j = e. Дійсно, як e можна узяти тотожний рух, а як j -1 — рух, зворотне j, тобто що повертає кожну точку фігури з нового положення в старе.

  Загальне (формальне) визначення Р. таке. Хай *G* — довільна безліч яких-небудь елементів, на якій задана композиція (інакше: дія над елементами): для будь-яких двох елементів j,y з *G* визначений деякий елемент joy знову з *G* . Якщо при цьому виконуються умови 1), 2), 3), та безліч *G* із заданою на нім композицією називається групою.

  Наприклад, якщо *G* — безліч всіх цілих чисел, а композиція на *G* — їх звичайне складання (роль e гратиме число 0, а роль (j -1 — число —j), то *G* — група. Частина *Н* безлічі *G* , що складається з парних чисел сама буде Р. відносно тієї ж композиції. У таких випадках говорять, що *Н —* підгрупа групи *G* . Відзначимо, що обидві ці Р. задовольняють наступній додатковій умові: 4) j○y = y○j для будь-яких j, в з групи. Всяка група з цією умовою називається комутативною, або абельовой.

  Ще один приклад групи. Підстановкою безлічі символів 1, 2 ..., *n* називається таблиця , де в нижній строчці коштують ті ж символи 1, 2 ..., *n,* але, взагалі кажучи, в іншому порядку. Композицію двох підстановок j,y визначають наступним правилом: якщо під символом *х в* підстановці коштує символ *в,* а під символом *в* в підстановці в коштує символ *z,* те в підстановці j○y під символом *х* ставиться символ *z* .

Можна перевірити, що безліч підстановок *n*  символів відносно такої композиції є групою.

**Історична довідка.** Поняття послужило у багатьох відношеннях зразком при перебудові алгебри і взагалі математики на рубежі 19—20 вв.(століття) Витоки поняття **Груп** виявляються в декількох дисциплінах, головна з яких — теорія вирішень рівнянь алгебри в радикалах. У 1771 французькі математики Ж. Лагранж і А.Вандермонд вперше для потреб цієї теорії застосували підстановки (для теорії Р. особливо важливий «Мемуар про вирішення алгебри рівнянь» Лагранжа). Потім у ряді робіт італійського математика П. Руффіні (1799 і пізніше), присвячених доказу нерозв'зності рівняння 5-ій мірі в радикалах, систематично використовується замкнутість безлічі підстановок відносно їх композиції і по суті описані підгрупи групи всіх підстановок п'яти символів. Глибокі зв'язки між властивостями Р. підстановок і властивостями рівнянь були вказані норвезьким математиком Н. Абелем (1824) і французьким математиком Е. Галуа (1830). Галуа належать і конкретні досягнення в теорії Г.: відкриття ролі т.з. нормальних підгруп у зв'язку із завданням про вирішувану рівнянь в радикалах, встановлення властивості простоти знакозмінних Р. міри *n* ³ *5* і др.; він же ввів термін «група» (le *G* roup), хоча і не дав строгого визначення. Важливу роль в систематизації і розвитку теорії Р. зіграв трактат французького математика К. Жордана про Р. підстановок (1870).

  Незалежно і з інших міркувань ідея **Груп** виникла в геометрії, коли в середині 19 ст на зміну єдиної античної геометрії прийшла багаточисельна «геометрія» і гостро встало питання про встановлення зв'язків і спорідненості між ними. Вихід з положення, що створилося, був намічений дослідженнями по проектній геометрії, присвяченими вивченню поведінки фігур при різних перетвореннях. Поступово інтерес в цих дослідженнях перейшов на вивчення самих перетворень і пошук їх класифікації. Таким «вивченням геометричної спорідненості» багато займався німецький математик А. Мебіус. Завершальним етапом на цій дорозі з'явилася «Ерлангенськая програма» німецького математика Ф. Клейна (1872), що поклала в основу класифікації геометрії поняття Р. перетворень: кожна геометрія визначена деякій Р. перетворень простору, і лише ті властивості фігур належать до даної геометрії, які інваріантні відносно перетворень відповідною Р.

  Третє джерело поняття **Груп** — теорія чисел. Вже Л. [*Ейлер*](http://vseslova.com.ua/word/%D0%95%D0%B9%D0%BB%D0%B5%D1%80_%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4-124353u) (1761), вивчаючи «вирахування, що залишаються при діленні мір», по суті користувався порівняннями і розбиттям на класи вирахувань, що на теоретіко-груповій мові означає розкладання Р. на суміжні класи по підгрупі. До. [*Гаус*](http://vseslova.com.ua/word/%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%BB_%D0%A4%D1%80%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%96%D1%85-22869u) в «Арифметичних дослідженнях» (1801), займаючись рівнянням ділення круга, фактично визначив підгрупи його групи Галуа. Там же, вивчаючи «композицію двійкових квадратичних форм», Гаус по суті доводить, що класи еквівалентних форм утворюють відносно композиції кінцеву абельову **Групу**.. Розвиваючи ці ідеї, німецький математик Л. Кронекер (1870) впритул підійшов до основних теоремі про кінцеві абельових Р., хоча і не сформулював її явно.

  Усвідомлення в кінці 19 ст принципової єдності теоретіко-груповіх форм мислення, що існували на той час незалежно в різних областях математики, привело до вироблення сучасного абстрактного поняття Р. (норвезький математик С. Лі, йому.(німецький) математик Ф. Фробеніус і ін.). Так, вже Лі в 1895 визначав Р. як сукупність перетворень, замкнуту відносно їх композиції, що задовольняє умовам 1), 2), 3). Вивчення Р. без припущення їх кінцівки і без яких би то не було припущень про природу елементів вперше оформилося в самостійну область математики з виходом книги О. Ю. [*Шмідта*](http://vseslova.com.ua/word/%D0%A8%D0%BC%D1%96%D0%B4%D1%82_%D0%9E%D1%82%D1%82%D0%BE_%D0%AE%D0%BB%D1%8C%D0%B5%D0%B2%D1%96%D1%87-123081u) «Абстрактна теорія груп» (1916).

**Теорія груп.** Кінцевою метою власне теорії **Груп** є опис всіх можливих групових композицій. Теорія **Груп** розпадається на ряд великих розділів, що виділяються найчастіше додатковими умовами на групову композицію або внесенням в **Груп** додаткових структур, пов'язаних певним чином з груповою композицією. Перерахуємо найважливіші розділи теорії груп.

  а) Теорія кінцевих **Груп** . Основна проблема цієї старої гілки теорії **Груп** — класифікація т.з. простих кінцевих Р., граючих роль цегли при побудові довільною кінцевою **Груп** Однім з найбільш глибоких фактів, встановлених в цій теорії, є теорема про те, що всяка неабелевого проста кінцева Р. складається з парного числа елементів.

  би) Теорія абельових **Груп** відправною точкою багатьох досліджень в цій області служить основна теорема про кінцево-породжені абельових Р., що повністю з'ясовує їх будову.

  в) Теорія вирішуваних і нільпотентних Г. Поняття вирішуваною Р. є узагальненням поняття абельовой Г. Воно по суті йде від Галуа і тісно пов'язано з вирішуваною рівнянь в радикалах. Для кінцевих Р. це поняття може бути визначене багатьма рівносильними способами, які перестають бути рівносильними при відмові від кінцівки Г. вивчення класів, що виникають при цьому Р. складає предмет теорії узагальнено вирішуваних і узагальнено нільпотентних Р.

  г) Теорія Р. перетворень. Поняття **Груп** виникло історично саме як поняття Р. перетворень, але надалі було звільнено від цієї конкретної оболонки. Проте теорія Р. перетворень залишилася важливою частиною загальної теорії. Типове питання в ній: якими абстрактними властивостями володіє Р., задана як Р. перетворень деякої безлічі? Особлива увага залучають, зокрема, Р. підстановок і Г. матриць.

  д) Теорія представлень Р. — важливе знаряддя вивчення абстрактних Г. Представлення абстрактною Р. у вигляді деякої конкретної Р. (наприклад, у вигляді Р. підстановок або матриць) дозволяє проводити тонкі обчислення і з їх допомогою виявляти важливі абстрактні властивості. Особливо великі успіхи теорії вистав в теорії кінцевих Р., де з її допомогою отриманий ряд результатів, недоступних доки абстрактним методам.

  е) З розділів теорії груп, що виділяються внесенням в Р. додаткових структур, погоджених з груповою композицією, відзначимо теорію топологічних Р. (у них групова композиція в деякому розумінні безперервна), зокрема її стару гілку — теорію груп Лі.

  Теорія **Груп**. є одній з найрозвиненіших областей алгебри і має багаточисельні вживання як в самій математиці, так і за її межами. Наприклад, за допомогою теорії Р. російський учений Е. С. Федоров (1890) вирішив завдання класифікації правильних просторових систем крапок, що є одному з основних завдань кристалографії. Це був історично перший випадок вживання теорії Р. безпосередньо в природознавстві. Велику роль грає теорія Р. у фізиці, наприклад в квантовій механіці, де широко використовуються міркування симетрії і теорія представлень Р. лінійними перетвореннями.