4.5 [Рівняння з параметрами](file:///G%3A%5C%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA%5Cparametr.ppsx) (див.презентацію)

Рівняння першого степеня з параметрами

Розглянемо рівняння першого степеня з параметрами

.

1. При  рівняння має один розв’язок .

2. При  рівняння не має розв’язків.

3. При  кожне значення  є розв’язком рівняння. Розв’язок рівняння не єдиний. Рівняння має безліч розв’язків.

**Приклад.** Розв’язати лінійне рівняння

.

* При ,  рівняння перетворюється до вигляду

.

1. Якщо  або , то рівняння не має розв’язків.

2. Якщо , то , тобто .

3. Якщо , , , то .

**Приклад.** Знайти розв’язок рівняння

.

* Рівняння перетворюється до вигляду .

1. Якщо , то рівняння не має розв’язків.

2. Якщо , то , .

3. Якщо , , то .

**Системи рівнянь з параметрами**

Часто систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна звести до одного лінійного рівняння виду .

**Приклад.** Знайти розв’язок системи лінійних рівнянь

.

* З першого рівняння знаходимо  і підставляємо в друге та третє рівняння. Дістаємо систему

.

З першого рівняння знаходимо  і підставляємо в друге рівняння. Дістаємо одне рівняння з одним невідомим . З попередніх рівнянь знаходимо .

Аналогічно виключаються невідомі із системи лінійних алгебраїчних рівнянь з параметрами.

**Приклад.** Знайти значення параметра *b*, при якому система лінійних рівнянь



має нескінченну множину розв’язків.

* Виключаючи невідоме , дістаємо рівняння

.

При  це рівняння, а отже, і вихідна система лінійних рів­нянь має нескінченну множину розв’язків.

**Приклад.** Знайти значення параметра , при якому система рівнянь



не має розв’язків.

* Виключаючи невідоме , приходимо до рівняння першого степеня з одним невідомим

.

При  це рівняння, а отже, і вихідна система рівнянь не має розв’язків.

**Приклад.** Знайти значення параметра , яке задовольняє таку умову: для будь-якого дійсного значення параметра  знайдеться хоча б одне значення параметра , таке що задана система



має принаймні один розв’язок.

* Виключивши із системи рівнянь невідоме , дістанемо лінійне рівняння

.

Якщо , то це рівняння має розв’язок при будь-якому значенні . При  або  коефіцієнт при  у ньому перетворюється на нуль. Щоб це рівняння мало розв’язок, необхідне виконання умов

, .

Дістали два квадратних рівняння відносно *с*, розв’язки яких існують за умови невід’ємності їхніх дискримінантів:



Звідси знаходимо значення параметра .

**Приклад.** Знайти умови, за яких існують розв’язки системи лінійних рівнянь



* Додаючи почленно рівняння системи, дістаємо:

, .

Послідовно віднімаючи від цього рівняння кожне з рівнянь системи, знаходимо розв’язки системи, виражені через параметр *а*:

.

Розв’язки системи рівнянь існують, якщо .

**Приклад.** Знайти значення параметра , при якому сума коренів рівняння  дорівнює 1. 

**Розв’язання.** Поділимо  рівняння на :

За теоремою Вієта,  Звідси 

**Відповідь:** -0,5.

**Приклад**  Знайти значення параметра , при якому система



не має розв’язку.

**Розв’язання.** Для того, щоб система не мала розв’язку, повинна виконуватися умова



Звідси 

**Відповідь:** -4.

Розв’язки системи рівнянь існують, якщо .



### *Відповідь*

**1.**  ;

**2.**  ;

**3.**  ;

**4.**  ;

**5.**  ;

**6.**  ;

**7.**  ;

**8.**  ;



**9.**  

 при ;

**10.** При яких значеннях параметра  для довільного дійсного значення  знайдеться хоча б одне дійсне значення параметра , таке що задана система рівнянь

 

матиме принаймні один розв’язок.

4

Рівняння другого степеня з параметрами

Алгебраїчне рівняння другого степеня з одним невідомим

 (1)

називається також *квадратним рівнянням*.

Рівняння виду



називається *зведеним квадратним рівнянням* і має розв’язок

.

Для рівняння (1) розв’язок можна подати у вигляді

.

Для коренів  зведеного квадратного рівняння справджується формула Вієта



Цей результат випливає з тотожності

.

Корені квадратного рівняння (1) дійсні і різні при , крат­ні при  і не є дійсними при . Якщо , то многочлен



з дійсними коефіцієнтами  набуває значень лише одного знака. При  многочлен  набуває значень одного знака, за винятком однієї точки — кратного кореня рівняння (1), де многочлен  набуває нульового значення.

**Приклад.** Знайти розв’язок рівняння

.

* При  рівняння має один розв’язок .

При  знаходимо дискримінант

,

а отже, рівняння має два розв’язки

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння з параметром 

, якщо , .

* Виконавши відповідні перетворення, дістанемо квадратне рівняння

, (2)

дискримінант якого

.

При  ліва частина рівняння (2) тотожно дорівнює нулю, а тому його розв’язком є будь-яке значення .

При  обидві частини рівняння (2) можна поділити на , знайшовши два корені:

. (3)

За умови  маємо

.

Розв’язавши рівняння  при , дістанемо розв’язок . Остаточно доходимо таких висновків.

1. При  рівняння не має розв’язків.

2. При  рівняння має довільний розв’язок .

3. При  рівняння має єдиний розв’язок .

4. При  рівняння має дворазові розв’язки .

5. При  рівняння має комплексні розв’язки.

6. При  рівняння має два різ­ні розв’язки виду (3).

**Приклад.** Розв’язати рівняння

 з параметром .

* Якщо , то дане рівняння стає лінійним. Розв’язуючи рівняння , знаходимо .

При  рівняння має єдиний розв’язок .

При  рівняння має розв’язок .

При  знаходимо дискримінант

,

а далі й корені рівняння

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Передусім доходимо висновку, що .

При цьому рівняння зводиться до вигляду

.

Знаходимо дискримінант цього рівняння

.

При  виконуються умови . При ,  знаходимо розв’язок рівняння

. (4)

Якщо , то рівняння має єдиний розв’язок . Перевіримо виконання умови , яка набирає вигляду нерівностей

.

Остаточно доходимо таких висновків.

1. Якщо , то рівняння має єдиний розв’язок .

2. При  рівняння розв’язків не має.

3. При  рівняння має єдиний розв’язок .

4. Якщо , , то рівняння має два розв’язки виду (4).

Задачі на використання властивостей дискримінанта

Якщо дискримінант , то квадратне рівняння



не має дійсних коренів. Через це квадратний тричлен



не змінює свого знака при  і має знак коефіцієнта  або коефіцієнта .

**Приклад.** Для яких значень параметра  виконується нерівність

?

* Необхідною і достатньою умовою правильності нерівності є виконання системи умов



Розв’язуючи цю систему нерівностей, знаходимо відповідь: .

**Приклад.** При яких значеннях параметра нерівність



виконується для будь-якого значення ?

* Приходимо до системи нерівностей



яка має розв’язок .

**Приклад.** Знайти всі значення параметра , при яких нерівність



виконується для пари будь-яких чисел , таких що .

* Якщо , то . Приходимо до системи нерів-
ностей



яку можна записати у вигляді



Приходимо до системи нерівностей для параметра :



Ця система має розв’язок .

Використання формул Вієта

**Приклад.** Знайти значення параметра , при яких відношення коренів рівняння



дорівнює 2.

* Маємо систему рівнянь



Оскільки шукаємо тільки значення параметра , то виключаємо невідомі . Маємо рівняння:

.

Останнє рівняння має розв’язки , .

При  маємо , , а при  , .

**Приклад.** Знайти добуток значень параметра , при яких сума коренів рівняння



дорівнює сумі їхніх квадратів.

* Скориставшись формулами Вієта, дістанемо систему



Останнє рівняння можна записати у вигляді

.

Виключаючи , дістаємо рівняння для 

.

**Приклад.** Знайти ціле значення параметра , при якому рівняння



має рівні між собою корені.

* Квадратне рівняння має рівні між собою корені, якщо його дискримінант дорівнює нулю. Розв’яжемо рівняння

,

звідки , . Значення  шукане.

**Приклад.** Знайти суму кубів коренів рівняння

.

* Можна знайти корені рівняння  і обчислити суму кубів коренів:

.

Таку саму відповідь можна дістати за допомогою формул Вієта:





Функція  називається симетричною, якщо вона не змінюється внаслідок довільного перестановлення аргументів, тобто .

Коефіцієнти зведеного квадратного рівняння



є симетричними функціями від коренів рівняння.

Довільну симетричну функцію  завжди можна подати через основні симетричні функції , . Це й було виконано в попередньому прикладі.

**Приклад.** При яких значеннях параметра  сума квадратів коренів рівняння



буде мінімальною?

* Використовуючи формули Вієта, дістаємо:

.

Знаходимо дискримінант рівняння

.

Оскільки при довільних значеннях параметра  виконується нерівність , то на значення параметра  обмежень немає. Сума квадратів коренів набуває найменшого значення, що дорівнює 1, при .

**Приклад.** При якому значенні параметра  сума квадратів коренів рівняння



набуває найменшого значення?

* Знаходимо дискримінант рівняння (1):

.

З умови  знаходимо, що рівняння (1) має розв’язок лише при . Знаходимо суму квадратів коренів рівняння (1) за формулами Вієта:

.

Найменшого значення лінійна функція  може набувати лише на кінці відрізка .

Оскільки , то  досягається при .

**Приклад.** При яких значеннях параметра  рівняння

, 

мають спільний корінь?

* Запишемо рівняння Вієта

,

а далі візьмемо . Крім значень  дістаємо також . Рівняння

, 

мають спільний корінь .

Ще один спосіб розв’язування прикладу полягає ось у чому.

Нехай  — шуканий спільний корінь рівнянь. Маємо систему алгебраїчних рівнянь

 (2)

Виключимо , помноживши друге рівняння на  і віднявши від першого рівняння. Дістанемо рівняння

.

При  рівняння (2) не мають дійсних розв’язків.

Виключаючи , дістаємо рівняння для параметра :

, .

При  рівняння (2) не мають спільного кореня. При  рівняння (2) мають спільний корінь .

**Приклад.** Знайти значення параметра , при якому один із коренів рівняння

 (3)

утричі менший від одного з корнів рівняння

. (4)

* Нехай  — корінь рівняння (3),  — корінь рівняння (4). Маємо систему рівнянь



з якої знаходимо . Підставляючи  в рівняння (3), діста­ємо рівняння для :

.

При  рівняння (3) має корінь , а рівняння (4) — корінь .

При  рівняння (3) має корінь , а рівняння (4) — корінь .

Розміщення коренів квадратного рівняння

З’ясуємо, як розміщуються на дійсній осі корені квадратного рівняння

, . (1)

З цією метою скористаємося тим, що графіком функції  є парабола, опукла вниз при  і опукла вгору при .

Наведемо прості теореми стосовно розміщення коренів квадратного рівняння (1) на дійсній осі.

***Теорема 1.*** ***Якщо , то на інтервалі  міститься один корінь рівняння (1).***

***Теорема 2.*** ***Якщо , то точка  лежить між коренями рівняння (1).***

***Теорема 3.******Якщо , то відрізок  лежить між коренями рівняння (1).***

***Теорема 4.******Якщо , то корені рівняння (1) лежать на півосі .***

***Теорема 5.******Якщо , то корені рівняння (1) лежать на півосі .***

***Теорема 6.******Якщо   , то корені рівняння (1) лежать на інтервалі .***

**Приклад.** Знайти значення параметра , при яких два корені рівняння



існують і належать інтервалу (0; 3).

* Графік функції  має перетинати вісь *Ох* або дотикатися до неї в точках, розміщених праворуч від точки . Тому дістаємо нерівності , , , які мають розв’язки .

Ще один спосіб розв’язування полягає у відшуканні найменшого кореня квадратного рівняння



та розв’язуванні нерівності , що також приводить до нерівності .

**Приклад.** Знайти значення параметра , при яких рівняння



має розв’язок.

* Позначивши , дістанемо квадратне рівняння

. (2)

Вихідні рівняння мають розв’язки, якщо рівняння (2) має корінь . Застосуємо загальний метод розв’язування. Дискримінант рівняння (2).

.

Тому рівняння (2) при довільних значеннях параметра  має дійсні розв’язки. Функція  досягає найменшого значення при .

Рівняння (2) матиме два розв’язки на відрізку [0; 1], якщо виконуватимуться нерівності

, , .

Ці нерівності несумісні, оскільки не мають спільного розв’язку. Тому рівняння (2) не може мати двох коренів на відріз­ку [0; 1] при будь-якому значенні параметра .

Розглянемо всі інші можливості.

Якщо , то рівняння (2) має корінь .

Якщо , то рівняння (2) має один корінь на інтервалі (0; 1). Отже, оскільки при  рівняння (2) має корінь на інтервалі (0; 1), остаточно дістанемо, що при  рівняння (2) має корінь на відрізку [0; 1], а вихідне рівняння має дійсні розв’язки.

У даному прикладі можна було б відразу розв’язати рівняння (2):

.

Умова  приводить до нерівності .

**Приклад.** При яких значеннях параметра  корені квадратного рівняння



додатні?

* Знайдемо дискримінант рівняння

.

Отже, корені рівняння існують при довільних значеннях параметра . Вершина параболи  міститься точці . Для того щоб корені рівняння були додатніми, необхідно і достат­ньо, щоб виконувались нерівності



Звідси випливає, що корені квадратного рівняння додатні при .

У цьому прикладі можна знайти корні

, .

З нерівності  випливає .



### *Відповіді*

**1.** При яких значеннях параметра  корені рівняння



більші від – 1? .

**2.** При яких значеннях параметра  один із коренів рівняння



більший від 3, а другий менший від 2? .

**3.** При яких значеннях параметра  сума квадратів коренів рів­няння



найменша? .

**4.** При яких значеннях параметра  нерівність



виконується для будь-якого *х*? .

**5.** Розв’язати рівняння

.

 при ;

 при  або ;
 при .

**6.** При яких значеннях параметра  відношення коренів рівняння  дорівнює 1,5. .

**7.** Знайти всі значення параметра  для кожного з яких нерівність



виконується для будь-якої пари чисел , таких, що .

.

**8.** При яких значеннях параметра  рівняння



має два відмінних дійсних розв’язки? .

**9.** Розв’язати рівняння

.

 при ;

 при .

**10.** При яких значеннях параметра  для довільного дійсного значення  знайдеться принаймні одне дійсне значення параметра , таке що система



має хоча б один розв’язок? .

**11.** При яких значеннях параметра  рівняння



має корені різних знаків? .

**12.** Знайти значення параметра , при яких корені рівняння



невід’ємні. .

**13.** При яких значеннях параметра  рівняння



має хоча б один позитивний корінь? .

**14.** Знайти значення параметра , при яких два корені рівняння



а) менші від 1; б) більші від – 1; в) відокремлені числом 1.

а);

б) ;

в) .

**15.** При яких значеннях параметра  один корінь рівняння



більший від 2, а другий корінь менший від 2. .

**16.** При яких значеннях параметра  один корінь рівняння



менший від 1, а другий корінь більший від 2? .

**17.** При яких значеннях  будь-який розв’язок нерівності  є розв’язком нерівності . .