4.5 Рівняння з модулями

Для розв’язування рівнянь, що містять змінну під знаком модуля, найчастіше використовуються такі методи: за означенням модуля, піднесенням до квадрату лівої і правої частини, метод інтервалів. Але можна **розв’язувати ці рівняння, використовуючи формулу відстані між двома точками координатної прямої.**

Розглянемо цей прийом на **прикладі** 

На числовій прямій потрібно знайти точки, сума відстаней яких від точок х = - 5 і х = 8 дорівнює 16. Позначимо через *у* відстань, на якій знаходиться точка зліва від точки х = 5, одержимо допоміжне рівняння у + (у + 13) = 16 або у = 1,5, тобто х1 = - 6,5.



В середині інтервалу  точок, що задовольняють рівняння, немає. Справа від точки х = 8 на відстані, що дорівнює 1,5, знаходиться друга точка, що задовольняє рівняння : х2 = 9,5.

Відповідь.

Використовуючи числову пряму можна встановити, що рівняння виду , де , якщо має 2 корені, причому ці корені знаходяться поза інтервалом . Якщо рівняння має нескінченну множину коренів, причому розв’язком є інтервал . Якщо  рівняння коренів немає.

Розглянемо **приклади розв’язання рівнянь, що містять різницю модулів**.

.

На числовій прямій потрібно знайти різницю відстаней яких до точок х = - 4 і х = 2 дорівнює 5. Так як відстань між точками х = - 4 і х = 2 дорівнює 6, то шукана точка знаходиться в середині інтервалу .



Позначимо через *у* відстань від шуканої точки до точки х = - 4, одержимо

у – ( 6 - у) = 5, або у = 5,5, тобто х = 1,5.

Відповідь.

Порівнюючи відстань між точками числової прямої, легко встановити, що рівняння виду має один розв’язок, якщо ; в цьому випадку шукана точка знаходиться внутрі інтервалу . Якщо  рівняння має нескінченну множину коренів. Якщо  рівняння коренів не має.

В тих випадках, коли коефіцієнти при х відмінні від 1, їх можна винести за знак модуля, а потім розв’язувати рівняння прийомом, поданим вище. Наприклад, рівняння  запишемо у вигляді 

На числовій прямій потрібно знайти точки, відстань яких від точки

х = 3 були в 4 рази менші, ніж від х = 5.

1. Нехай шукана точка знаходиться поза інтервалом  зліва від точки

х = 3 на відстані *у* , тоді маємо рівняння 4у = у + 2, у =2/3, тобто х = .

1. Нехай шукана точка знаходиться всередині інтервалу  на відстані z від точки 3, тоді маємо рівняння : 4z = 2 – z, звідки z = 2/5, а х = .

Поза інтервалом  справа від х = 5 рівняння коренів не має.

Відповідь.

Отже, розв’язуючи рівняння , що містять змінну під знаком модуля, вже на початковому етапі, склавши допоміжне рівняння, ми ще до розв’язання рівняння встановлюємо, в яких проміжках потрібно шукати корені і скільки коренів має рівняння.

Розглянемо ще два такі рівняння :

**Приклад.** 

Рівняння можна переписати так :

.

Так як , то розв’язком рівняння є весь інтервал .

**Приклад.** .

Маємо рівняння , яке має 2 корені : .

Відповідь.

Розглянемо ще деякі приклади рівнянь з модулями.

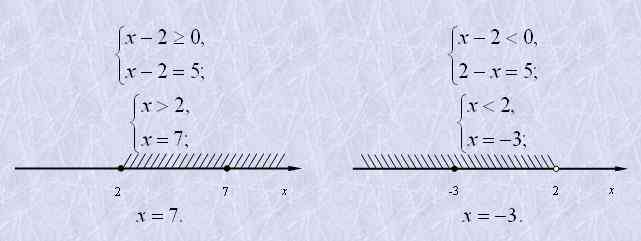
**Приклад.** Розв'язати рівняння |x-2|=5.

Згідно з означенням модуля необхідно розглянути два випадки:

x-2≥0, тоді |x-2|=x-2,

x-2<0, тоді |x-2|=-(x-2)=2-x.

Отже отримаємо такі системи



Відповідь: x=7, x=-3.

**Приклад.** Визначити суму розв’язків рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image002.gif

**Розв’язання.** Відкриємо модуль у лівій частині рівняння. Отримаємо два випадки:

**1)** http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image004.gif   http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image006.gif

**2)** http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image008.gif    http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image010.gif

     Отже,  сума розв’язків рівняння дорівнює http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image012.gif

**Відповідь:** -14.

**Приклад.** Визначити http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image014.gif, якщо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image016.gif

**Розв’язання.** Запишемо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image018.gif Оскільки http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image020.gif і http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image022.gif то http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image024.gif тоді і лише тоді, коли http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image026.gif Звідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image028.gif  http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image030.gif і http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image032.gif

**Відповідь:** 1.

**Приклад.** Визначити розв’язок рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image034.gif у проміжку http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image036.gif

**Розв’язання.** Для значень http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image038.gif з проміжку http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image040.gif маємо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image042.gif і http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image044.gif Отже, при http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image046.gif рівняння матиме вигляд http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image048.gif Звідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image050.gif і http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image052.gif

**Відповідь:** 2,7.

**Приклад.** При якому значенні параметра http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image054.gifрівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image056.gif має три розв’язки?

**Розв’язання.** Відкриємо зовнішній модуль у лівій частині рівняння. Отримаємо два випадки:

**1)  http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image058.gifhttp://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image060.gif**

**2)** http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image062.gif

     Для того, щоб рівняння мало три розв’язки, повинна виконуватися умова http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image064.gif. Тоді у випадку **1)** матимемо два розв’язки, а у випадку **2)  —** один розв’язок. Звідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image066.gif

**Відповідь:** -4.

**Приклад.** Визначити кількість розв’язків рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image068.gif

**Розв’язання.** Відкриємо модуль у лівій частині рівняння. Отримаємо два випадки:

**1)**

**http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image070.gif    http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image072.gif    http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image074.gif**

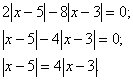
**2)**

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image076.gifhttp://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image078.gif http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image080.gif http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image082.gif

**Відповідь:** 4.

**Приклад.** Обчислити суму цілих розв’язків рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image084.gif

**Розв’язання.**  Запишемо



Розглянемо випадки:

**1) http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image088.gif**тоді

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image090.gifhttp://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image092.gif http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image094.gif

**2) http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image096.gif**тоді

**http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image098.gifhttp://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image100.gif**

*****отже, усі значення http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image104.gifз проміжку http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image106.gif задовольняють рівняння.

**3) http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image108.gif**тоді

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image110.gif     http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image112.gif      http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image114.gif

Цілі числа http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image116.gif є розв’язками рівняння. Їхня сума дорівнює http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/8/r8_image118.gif

**Відповідь:** 9.

Рівняння з модулями близькі до ірраціональних рівнянь, оскільки

. (1)

Звичайно використовують означення модуля *х*:



**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Згідно з умовою  дістаємо рівняння . Якщо , то , .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Знайдемо точки, в яких модулі перетворюються на нуль:

, ; , .

Ці точки розбивають числову вісь на частини, в кожній з яких вирази під знаком модуля мають один і той самий знак.

1) ; , ;

2) ; ,  — маємо тотожності;

3) ; , .

Остаточно дістаємо .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

Знайдемо точки, де , , . Розглянемо всі можливі випадки:

1) , , ;

2) ; , ;

3) ; , .

**Приклад.** Розв’язати систему рівнянь



* Розглянемо всі можливі випадки.

1) , :

. Знайшли розв’язок системи.

2) , :

. Розв’язок не задовольняє умову.

3) , 

. Розв’язок не задовольняє умову.

4) , 

. Знайшли розв’язок системи. ⮘

З формули (1) випливають правила внесення (винесення) множників під знак радикала:

. (2)

Якщо множник  вноситься під радикал, то знак множника  залишається поза радикалом.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Помножимо обидві частини рівняння на , .

.

Розглянемо можливі випадки.

1. . Вносимо додатний множник під знак радикала:

, , ,

, . ; , .

Корінь  не задовольняє умові. Остаточно маємо .

2. . Вносимо від’ємний множник під знак радикала за формулою (2):

, , , , .

, , . Корінь  не задовольняє умову. Остаточно маємо: .



Як розв’язати рівняння з модулями?



**Розв'язати рівняння:**

а) |x|-1=5; е) |x+1|+|x-2|=3;

б) |2x-3|=5; є) |x|+|x+1|=2;

в) |x-8|=x-8 ж) |x|+|x+2|+|2-x|=x+1;

д) 2-x=|3x-1|

1. . 
2. . 
3. . 
4. . 