**4.7 Рівняння вищих порядків.**

Розглянемо вираз http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image071.gif,

де http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image073.gif — дійсні числа, http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image075.gif, http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image077.gif— натуральне число, http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image078.gif— змінна. http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image080.gif називається многочленом степеня http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image081.gif з дійсними коефіцієнтами http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image082.gif. Число http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image084.gif називається коренем многочлена http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image085.gif, якщо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image087.gif

**Теорема Безу.**  Якщо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image088.gif— корінь многочлена http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image089.gif, то http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image090.gif ділиться на http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image092.gif, тобто http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image094.gif де http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image096.gif — многочлен степеня http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image098.gif.

**Теорема 1.** Нехай усі коефіцієнти http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image099.gif многочлена http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image100.gif — цілі числа. Якщо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image102.gif— раціональний корінь цього многочлена, де http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image104.gif — нескоротний дріб, то http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image106.gif ділиться на http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image108.gif, а http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image110.gif ділиться на http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image112.gif.

**Схема Горнера.** Для розв’язування рівнянь вищих порядків використовується схема скороченого ділення многочлена на двочлен — схема Горнера.

    Розглянемо многочлен з http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image113.gif з цілими коефіцієнтами http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image114.gif. Якщо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image115.gif має раціональний корінь http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image116.gif, то його можна знайти, скориставшись  теоремою 1. За теоремою Безу,  http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image117.gif де http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image119.gif — многочлен степеня http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image120.gif. Коефіцієнти http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image122.gif знайдемо за наступною схемою:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image123.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image125.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image127.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image129.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image131.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image132.gif | | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image133.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image135.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image137.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image139.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image141.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image143.gif | http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image145.gif | |

     Знову використовуємо теорему 1 і знаходимо раціональний корінь http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image147.gif многочлена http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image149.gif, який також буде коренем многочлена http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image151.gif, застосовуємо схему Горнера і т.д.

**Приклад 3.**   Розв’язати рівняння  http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image153.gif

**Розв’язання.** У даному випадку http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image155.gif тому, якщо рівняння має раціональний корінь http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image156.gif, то http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image157.gif дорівнює http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image159.gif або http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image161.gif або http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image163.gif Легко перевірити, що http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image165.gif — корінь рівняння. Застосовуючи схему Горнера, маємо

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **8** | **12** | **-12** | **-9** |
| **1** | **1** | **9** | **21** | **9** | **0** |

Отже,  http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image167.gif Далі шукаємо розв’язки рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image169.gif.  Його коренями можуть бути числа http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image170.gif або http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image171.gif або http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image172.gif

Підставляємо ці числа у рівняння і знаходимо корінь http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image174.gif Знову застосовуємо схему Горнера:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **9** | **21** | **9** |
| **-3** | **1** | **6** | **3** | **0** |

Отже,  http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image176.gif  і

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image178.gif

Залишилося розв’язати квадратне рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image180.gif Його коренями є числа

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image182.gif

**Відповідь:** http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image183.gif, http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image185.gif, http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image187.gif, http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image189.gif.

**Приклад 4.**  Знайти http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image191.gif, якщо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image193.gif.

**Розв’язання.** Додамо рівняння системи. Отримаємо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image195.gif Отже, http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image197.gif і  http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image199.gif

**Відповідь:** 2.

**Приклад 5.** Визначити найменший цілий розв’язок рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image201.gif

**Розв’язання.** Запишемо рівняння у вигляді

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image203.gif

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image205.gif

Позначимо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image207.gif Отримаємо

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image209.gif

Звідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image211.gif Отже, маємо два випадки: http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image213.gif У першому випадку розв’язками є числа http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image215.gif У другому випадку цілих розв’язків немає.

Найменший цілий розв’язок рівняння —  http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image217.gif

**Відповідь:** -3.

**Приклад 6.**  Визначити найбільший цілий розв’язок рівняння

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image219.gif

**Розв’язання.**

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image221.gif

Позначимо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image223.gif Отримаємо рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image225.gif Звідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image227.gif і http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image229.gif Отже, маємо два випадки:

**1)** http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image231.gif**.** Звідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image233.gif   http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image235.gif

**2)** http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image237.gifЗвідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image239.gif   http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/4/r4_image241.gif

**Відповідь:** 9.