# Рівняння четвертого степеня

Графік функції y=x^4-0,5x^3-5x^2+2x+4\,\quad

У [математиці](file:///C:\wiki\%25D0%259C%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25BC%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B8%25D0%25BA%25D0%25B0) **рівняння четвертого степеня** є результатом прирівнювання [полінома](file:///C:\wiki\%25D0%259F%25D0%25BE%25D0%25BB%25D1%2596%25D0%25BD%25D0%25BE%25D0%25BC) четвертого степеня до нуля. Воно має такий загальний вигляд

ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \,\quad,

де a\ne 0\quad.

Рівняння четвертого степеня є рівнянням найвищого степеня, що дозволяє подання загального розв'язку у [радикалах](file:///C:\wiki\%25D0%25A0%25D0%25B0%25D0%25B4%25D0%25B8%25D0%25BA%25D0%25B0%25D0%25BB_(%25D0%25BC%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25BC%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B8%25D0%25BA%25D0%25B0)).

## Історія

[](file:///C:\wiki\%25D0%25A4%25D0%25B0%25D0%25B9%25D0%25BB:Math+2.gif)

Лодовіко Феррарі

Рівняння четвертого степеня було вперше розглянуто [математиками](file:///C:\wiki\%25D0%259C%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25BC%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B8%25D0%25BA%25D0%25B8) [Індії](file:///C:\wiki\%25D0%2586%25D0%25BD%25D0%25B4%25D1%2596%25D1%258F) між [400 до н. е.](file:///C:\wiki\400_%25D0%25B4%25D0%25BE_%25D0%25BD._%25D0%25B5.) і [200 н. е.](file:///C:\wiki\200)

[Лодовіко Феррарі](file:///C:\wiki\%25D0%25A4%25D0%25B5%25D1%2580%25D1%2580%25D0%25B0%25D1%2580%25D1%2596_%25D0%259B%25D0%25BE%25D0%25B4%25D0%25BE%25D0%25B2%25D1%2596%25D0%25BA%25D0%25BE) першим відкрив розв'язок рівнянь четвертого степеня ([1540](file:///C:\wiki\1540)), проте його робота мала один недолік: він спирався на розв'язок [кубічного рівняння](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D1%2583%25D0%25B1%25D1%2596%25D1%2587%25D0%25BD%25D0%25B5_%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F), яким він не володів, тому цей розв'язок не було опубліковано[[1]](#cite_note-0). Цей розв'язок було опублікувано разом із розв'язком кубічного рівняння його наставником [Кардано](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D0%25B0%25D1%2580%25D0%25B4%25D0%25B0%25D0%25BD%25D0%25BE_%25D0%2594%25D0%25B6%25D0%25B5%25D0%25BB%25D0%25BE%25D1%2580%25D0%25B0%25D0%25BC%25D0%25BE) у книзі [«Ars Magna»](file:///C:\w\index.php%3ftitle=Ars_Magna_(Gerolamo_Cardano)&action=edit&redlink=1) ([1545](file:///C:\wiki\1545)).

Розв'зок рівнянь вищих степенів (від п'ятого) у загальному випадку не можна подати в радикалах. Але недоведеність цього факту протягом деякого часу підбурювала вчених шукати такі розв'язки. [1824](file:///C:\wiki\1824) року було опубліковано [теорему Абеля-Руффіні](file:///C:\wiki\%25D0%2590%25D0%25B1%25D0%25B5%25D0%25BB%25D1%258F-%25D0%25A0%25D1%2583%25D1%2584%25D1%2584%25D1%2596%25D0%25BD%25D1%2596_%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25BE%25D1%2580%25D0%25B5%25D0%25BC%25D0%25B0), яка доводила неможливість подати корені рівнянь вищих степенів через радикали у загальному випадку[[2]](#cite_note-1).

## Застосування

Поліноми високих степенів часто виникають у проблемах математичних [методів оптимізації](file:///C:\wiki\%25D0%259C%25D0%25B5%25D1%2582%25D0%25BE%25D0%25B4%25D0%25B8_%25D0%25BE%25D0%25BF%25D1%2582%25D0%25B8%25D0%25BC%25D1%2596%25D0%25B7%25D0%25B0%25D1%2586%25D1%2596%25D1%2597), де, зокрема, доводиться розглядати поліноми четвертого степеня, хоча і не дуже часто.

Рівняння четвертого степеня часто виникають у комп'ютерній графіці і при обчисленні [рей-трейсингу](file:///C:\w\index.php%3ftitle=%25D0%25A0%25D0%25B5%25D0%25B9-%25D1%2582%25D1%2580%25D0%25B5%25D0%25B9%25D1%2581%25D0%25B8%25D0%25BD%25D0%25B3&action=edit&redlink=1) (обтікання променів) проти [торичних](file:///C:\wiki\%25D0%25A2%25D0%25BE%25D1%2580_(%25D0%25B3%25D0%25B5%25D0%25BE%25D0%25BC%25D0%25B5%25D1%2582%25D1%2580%25D1%2596%25D1%258F)) поверхонь, а також поверхонь четвертого порядку і [лінійчастих поверхонь](file:///C:\w\index.php%3ftitle=%25D0%259B%25D1%2596%25D0%25BD%25D1%2596%25D0%25B9%25D1%2587%25D0%25B0%25D1%2581%25D1%2582%25D1%2596_%25D0%25BF%25D0%25BE%25D0%25B2%25D0%25B5%25D1%2580%25D1%2585%25D0%25BD%25D1%2596&action=edit&redlink=1)[[3]](#cite_note-2).

Іншою типовою задачею, у процесі розв'язання якої виникає рівняння четвертого степеня, є пошук перетину двох еліпсів, заданих неканонічно.

Досить часто виникає потреба розв'язувати рівняння четвертого степеня у задачах, які полягають у пошуку умов стійкості [динамічних систем](file:///C:\wiki\%25D0%2594%25D0%25B8%25D0%25BD%25D0%25B0%25D0%25BC%25D1%2596%25D1%2587%25D0%25BD%25D1%2596_%25D1%2581%25D0%25B8%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25BC%25D0%25B8). Це пов'язано з тим, що потрібно шукати власні значення [матриць монодромії](file:///C:\w\index.php%3ftitle=%25D0%259C%25D0%25B0%25D1%2582%25D1%2580%25D0%25B8%25D1%2586%25D1%258F_%25D0%25BC%25D0%25BE%25D0%25BD%25D0%25BE%25D0%25B4%25D1%2580%25D0%25BE%25D0%25BC%25D1%2596%25D1%2597&action=edit&redlink=1) вищезгаданих систем, що у випадку матриць 4 на 4 рівнозначно розв'язанню деякого рівняння четвертого степеня.

Програмна версія стійкого розв'язку рівняння четвертого степеня наведена у Graphics Gems[[4]](" \l "cite_note-3)

## Розв'язання рівняння четвертого степеня

### Окремі випадки

#### Нульовий вільний член

Якщо *a*4 = 0, то один з коренів *x* = 0, а інші можна знайти, поділивши все рівняння на *x*, після чого отримавши [кубічне рівняння](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D1%2583%25D0%25B1%25D1%2596%25D1%2587%25D0%25BD%25D0%25B5_%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F),

a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0.\quad

#### Очевидні корені: 1 і −1

Рівняння a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0\quadмає корінь −1, якщо a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=0.\quad

У цьому випадку, a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4\quadможна поділити на x-1\quad, після чого продовжити шукати корені, опираючись на властивості коефіцієнтів.

Рівняння a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0\quadмає корінь 1, якщо a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=0.\quad

У цьому випадку, a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4\quadможна поділити на x+1\quad, після чого рівняння зводиться до кубічного.

#### Біквадратні рівняння

[](file:///C:\wiki\%25D0%25A4%25D0%25B0%25D0%25B9%25D0%25BB:Xxxx-5xx+4_.PNG)

Графік функції y=x^4-5x^2+4\,\quad. Поліном четвертого степеня, що стоїть у правій частині, є біквадратичним і має симетричні корені: 1 і −1, 2 і −2.

Рівняння четвертого степеня, у якому *a*3 і *a*1 дорівнюють нулю, набуває вигляду:

a_0x^4+a_2x^2+a_4=0\,\!\quad

Його називають [біквадратним рівнянням](file:///C:\wiki\%25D0%2591%25D1%2596%25D0%25BA%25D0%25B2%25D0%25B0%25D0%25B4%25D1%2580%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25BD%25D0%25B5_%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F) і воно просто розв'язується. Замінимо z=x^2\quad, після чого наше рівняння перетвориться на відповідне квадратне рівняння

a_0z^2+a_2z+a_4=0\,\!\quad

яке має корені:

z={{-a_2\pm\sqrt{a_2^2-4a_0a_4}} \over {2a_0}}\,\!\quad

Використавши обидва значення змінної *z*, отримаємо чотири корені x вихідного рівняння:

x_1=+\sqrt{z_1}\,\!\quad

x_2=-\sqrt{z_1}\,\!\quad

x_3=+\sqrt{z_2}\,\!\quad

x_4=-\sqrt{z_2}\,\!\quad

Якщо серед знайдених чисел *z* є від'ємні або комплексні числа, то деякі з коренів вихідного рівняння будуть [комплексними](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D0%25BE%25D0%25BC%25D0%25BF%25D0%25BB%25D0%25B5%25D0%25BA%25D1%2581%25D0%25BD%25D1%2596_%25D1%2587%25D0%25B8%25D1%2581%25D0%25BB%25D0%25B0).

#### Квазісиметричні рівняння

Загальний вигляд рівняння:

x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+m^2=0\quad, де m = a_3/a_1\quad. Це рівняння можна розв'язати таким способом:

Поділимо обидві частини рівняння на x^2\quad, отримаємо

x^2+a_1x+a_2+a_3/x+m^2/x^2=0\quad

x^2+m^2/x^2+a_1x+a_3/x+a_2=0\quad

(x^2+m^2/x^2)+a_1(x+m/x)+a_2=0\quad

після цього виконаємо заміну:

z=x + m/x.\quad

Маємо

z^2 - 2m= x^2 + m^2/x^2\quad

Отже:

(z^2-2m)+a_1z+a_2=0.\quad

Розв'язком цього рівняння є 2 дійсні корені

z_1\quadі z_2\quad

Повернемось до заміни, тоді корені початкового рівняння можна дістати, розв'язавши такі рівняння:

x^2 - z_1 x+m=0.\quad

і

x^2 - z_2 x+m=0.\quad

У випадку, коли a_0\quadвідмінне від 1 у

a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_0m^2=0\quad

цей метод безпосередньо застосовувати не можна. Проте, виконавши перший крок, що полягає у діленні рівняння на a_0\quadми отримаємо рівняння, зведене до потрібного вигляду.

Квазісиметричні рівняння четвертого степеня задовольняють таким умовам (вони випливають з [формули Вієта](file:///C:\wiki\%25D0%25A4%25D0%25BE%25D1%2580%25D0%25BC%25D1%2583%25D0%25BB%25D0%25B0_%25D0%2592%25D1%2596%25D1%2594%25D1%2582%25D0%25B0)): нехай x_1\quad, x_2\quad, і x_3\quad,x_4\quad — корені рівняння, тоді:

* x_1x_2=m\quad;
* x_3x_4=m\quad;
* x_1x_2x_3x_4=m^2\quad.

### Загальний випадок, метод Феррарі

Спочатку загальне рівняння четвертого степеня потрібно перетворити на *канонічне рівняння четвертого степеня*.

#### Канонізація рівняння четвертого степеня

Нехай

 A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0 \qquad\qquad(1')\quad

рівняння четвертого степеня, яке треба розв'язати. Поділимо обидві частини на *A*,

 x^4 + {B \over A} x^3 + {C \over A} x^2 + {D \over A} x + {E \over A} = 0. \quad

Наступним кроком позбавимося члена *x*3. Для цього зробимо підстановку

 x = u - {B \over 4 A} \quad.

Отимаємо

 \left( u - {B \over 4 A} \right)^4 + {B \over A} \left( u - {B \over 4 A} \right)^3 + {C \over A} \left( u - {B \over 4 A} \right)^2 + {D \over A} \left( u - {B \over 4 A} \right) + {E \over A} = 0. \quad

Розкриємо дужки, піднісши до відповідних степенів

 \left( u^4 - {B \over A} u^3 + {6 u^2 B^2 \over 16 A^2} - {4 u B^3 \over 64 A^3} + {B^4 \over 256 A^4} \right) 
+ {B \over A} 
\left( u^3 - {3 u^2 B \over 4 A} + {3 u B^2 \over 16 A^2} - {B^3 \over 64 A^3} \right) 
+ {C \over A} 
\left( u^2 - {u B \over 2 A} + {B^2 \over 16 A^2} \right) + {D \over A} \left( u - {B \over 4 A} \right) + {E \over A} = 0. \quad

Зведемо подібні доданки

 u^4 + \left( {-3 B^2 \over 8 A^2} + {C \over A} \right) u^2 + \left( {B^3 \over 8 A^3} - {B C \over 2 A^2} + {D \over A} \right) u + \left( {-3 B^4 \over 256 A^4} + {C B^2 \over 16 A^3} - {B D \over 4 A^2} + {E \over A} \right) = 0. \quad

Перепозначимо коефіцієнти при *u*. Нехай

 \alpha = {-3 B^2 \over 8 A^2} + {C \over A}, \quad

 \beta = {B^3 \over 8 A^3} - {B C \over 2 A^2} + {D \over A}, \quad

 \gamma = {-3 B^4 \over 256 A^4} + {C B^2 \over 16 A^3} - {B D \over 4 A^2} + {E \over A}. \quad

Отже, ми отримали рівняння

 u^4 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0 \qquad \qquad (1) \quad

яке називається **канонічним рівнянням четвертого степеня**.

Якщо \beta=0\quad, то ми отримаємо [біквадратне рівняння](file:///C:\wiki\%25D0%2591%25D1%2596%25D0%25BA%25D0%25B2%25D0%25B0%25D0%25B4%25D1%2580%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25BD%25D0%25B5_%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F), яке легко розв'язується.

#### Розв'язок Феррарі

Розглянемо суть методу [Феррарі](file:///C:\wiki\%25D0%25A4%25D0%25B5%25D1%2580%25D1%2580%25D0%25B0%25D1%2580%25D1%2596_%25D0%259B%25D0%25BE%25D0%25B4%25D0%25BE%25D0%25B2%25D1%2596%25D0%25BA%25D0%25BE) для розв'язання канонічного рівняння четвертого степеня. Для цього спочатку запишемо очевидну тотожність

 (u^2 + \alpha)^2 - u^4 - 2 \alpha u^2 = \alpha^2\,\quad

і додамо її до рівняння (1), отримаємо

 (u^2 + \alpha)^2 + \beta u + \gamma = \alpha u^2 + \alpha^2. \qquad \qquad (2) \quad

Це було зроблено для того, щоб замість *u*4 отримати повний квадрат: (*u*2 + α)2. Другий доданок, α*u*2 не зник, проте його знак замінився на протилежний і він перемістився на інший бік рівняння.

Наступним кроком є введення нової змінної *y* до повного квадрату у рівнянні (2), і перенесення 2*y* разом з коефіцієнтом *u*2 до правої частини. Отримаємо тотожну рівність, яку ми потім додамо до рівняння (2)


  \begin{matrix}
   (u^2+\alpha+y)^2-(u^2+\alpha)^2 & = & 2y(u^2+\alpha)+ y^2\ \ 
  \\
   & = & 2yu^2+2y\alpha+y^2,
  \end{matrix}
 \quad

також розглянемо очевидну рівність

 0 = (\alpha + 2 y) u^2 - 2 y u^2 - \alpha u^2\,\quad

Додамо дві останні рівності, отримаємо

 (u^2 + \alpha + y)^2 - (u^2 + \alpha)^2 = (\alpha + 2 y) u^2 - \alpha u^2 + 2 y \alpha + y^2\quad

Додавши цю рівність до (2), отримаємо

 (u^2 + \alpha + y)^2 + \beta u + \gamma = (\alpha + 2 y) u^2 + (2 y \alpha + y^2 + \alpha^2).\,\quad

Ця рівність еквівалентна

 (u^2 + \alpha + y)^2 = (\alpha + 2 y) u^2 - \beta u + (y^2 + 2 y \alpha + \alpha^2 - \gamma). \qquad \qquad (3)\,\quad

Виберемо змінну *y* так, щоб у правій частині рівності (3) утворився повний квадрат. Це станеться, якщо [дискримінант](file:///C:\wiki\%25D0%2594%25D0%25B8%25D1%2581%25D0%25BA%25D1%2580%25D0%25B8%25D0%25BC%25D1%2596%25D0%25BD%25D0%25B0%25D0%25BD%25D1%2582) правої частини дорівнюватиме 0. Для пояснення цього явища, розглянемо повний квадрат як деяку квадратичну функцію:

 (s u + t)^2 = (s^2) u^2 + (2 s t) u + (t^2).\,\quad

Квадратична функція з правого боку нерівності має три коефіцієнти. Можна переконатися, що квадрат другого з них мінус почетверений добуток першого на третього дасть нуль:

 (2 s t)^2 - 4 (s^2) (t^2) = 0.\,\quad

Тому, для того, щоб перетворити праву частину рівняння (3) на повний квадрат, потрібно розв'язати щодо параметра *y* таке рівняння:

 (-\beta)^2 - 4 (2 y + \alpha) (y^2 + 2 y \alpha + \alpha^2 - \gamma) = 0.\,\quad

Виконаємо множення і зведемо подібні доданки при *y*,

 \beta^2 - 4 (2 y^3 + 5 \alpha y^2 + (4 \alpha^2 - 2 \gamma) y + (\alpha^3 - \alpha \gamma)) = 0\,\quad

Поділимо обидві частини на −4, і перенесемо −*β*2/4 у праву частину,

 2 y^3 
+ 5 \alpha y^2 
+ ( 4 \alpha^2 - 2 \gamma ) y 
+ \left( \alpha^3 - \alpha \gamma - {\beta^2 \over 4} \right) 
= 0 \qquad \qquad \quad

Маємо [кубічне рівняння](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D1%2583%25D0%25B1%25D1%2596%25D1%2587%25D0%25BD%25D0%25B5_%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F) щодо *y*. Поділимо обидві частини на 2,

 y^3 + {5 \over 2} \alpha y^2 + (2 \alpha^2 - \gamma) y + \left( {\alpha^3 \over 2} - {\alpha \gamma \over 2} - {\beta^2 \over 8} \right) = 0. \qquad \qquad (4) \quad

##### Перетворення похідного кубічного рівняння до канонічного вигляду

Рівняння (4) є похідним кубічним рівнянням від рівняння четвертого степеня. Щоб його розв'язати, потрібно привести його до канонічного вигляду. Зробимо заміну

 y = v - {5 \over 6} \alpha. \quad

Рівняння (4) набуває вигляду

 \left( v - {5 \over 6} \alpha \right)^3 + {5 \over 2} \alpha \left( v - {5 \over 6} \alpha \right)^2 + (2 \alpha^2 - \gamma) \left( v - {5 \over 6} \alpha \right) + \left( {\alpha^3 \over 2} - {\alpha \gamma \over 2} - {\beta^2 \over 8} \right) = 0. \quad

Розкриємо дужки:

 \left( v^3 - {5 \over 2} \alpha v^2 + {25 \over 12} \alpha^2 v - {125 \over 216} \alpha^3 \right) + {5 \over 2} \alpha \left( v^2 - {5 \over 3} \alpha v + {25 \over 36} \alpha^2 \right) + (2 \alpha^2 - \gamma) v - {5 \over 6} \alpha (2 \alpha^2 - \gamma ) + \left( {\alpha^3 \over 2} - {\alpha \gamma \over 2} - {\beta^2 \over 8} \right) = 0. \quad

Зведемо подібні доданки при степенях *v*, врахувавши, що коефіцієнт при *v*2 дорівнює нулю і цей доданок знищується,

 v^3 + \left( - {\alpha^2 \over 12} - \gamma \right) v + \left( - {\alpha^3 \over 108} + {\alpha \gamma \over 3} - {\beta^2 \over 8} \right) = 0. \quad

Ми отримали канонічне кубічне рівняння.

Перепозначимо його коефіцієнти,

 P = - {\alpha^2 \over 12} - \gamma, \quad

 Q = - {\alpha^3 \over 108} + {\alpha \gamma \over 3} - {\beta^2 \over 8}. \quad

Отримаємо рівняння:

 v^3 + P v + Q = 0. \qquad \qquad (5)\quad

##### Розв'язання похідного кубічного рівняння

Розглянемо питання про розв'язання (нас задовольнить будь-який розв'язок) рівняння (5).

Позначимо: U=\sqrt[3]{{Q\over 2}\pm \sqrt{{Q^{2}\over 4}+{P^{3}\over 27}}}\quad

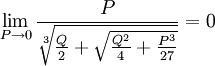
(взято з [кубічне рівняння](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D1%2583%25D0%25B1%25D1%2596%25D1%2587%25D0%25BD%25D0%25B5_%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F)),

отримається такий розв'язок кубічного рівняння (4) є:

y = - {5 \over 6} \alpha + {P\over 3U} - U \qquad \qquad (6)\quad

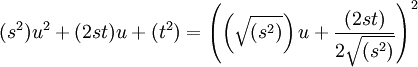
Можна показати, що мають місце залежності

1: P=0 \Longleftarrow {Q\over 2} + \sqrt{{Q^{2}\over 4}+{P^{3}\over 27}}=0\quad

2: 

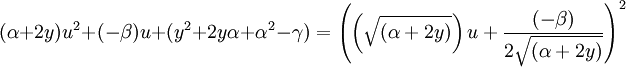
##### Видобування кореня з обох частин і завершення розв'язування

Розглянемо схему згортання повного квадрату:



Вона є вірною для обох знаків квадратних коренів, якщо їх брати однаковими. Ми не будемо писати власне знак ±, оскільки це викликатиме певні труднощі, зважаючи на те, що далі вживатимуться інші знаки ±, які виникнуть потім. Натомість, поряд з цим знаком ми будемо ставити індекс, що являтиме собою змінну, знак якої береться до уваги.

Зважаючи на це, ми отримаємо:

.

Зауваження: Якщо *β* ≠ 0 тоді *α* + 2*y* ≠ 0. А якщо *β* = 0, то ми отримаємо біквадратне рівняння, що було розглянуте вище.

Зважаючи на це (3) перетворюється на:

(u^2 + \alpha + y)^2 = \left( \left(\sqrt{\alpha + 2 y}\right)u - {\beta \over 2\sqrt{\alpha + 2 y}} \right)^2 \qquad\qquad (7)\quad.

Рівність (7) містить лише повні квадрати: один у лівій частині і один — у правій.

Якшо квадрати двох виразів рівні, то і самі вирази рівні або відрізняються лише знаком, тобто:

(u^2 + \alpha + y) = \pm\left( \left(\sqrt{\alpha + 2 y}\right)u - {\beta \over 2\sqrt{\alpha + 2 y}} \right) \qquad\qquad (7')\quad.

Зведемо подібні доданки при u:

u^2 + \left(\mp_s \sqrt{\alpha + 2 y}\right)u + \left( \alpha + y \pm_s {\beta \over 2\sqrt{\alpha + 2 y}} \right) = 0 \qquad\qquad (8)\quad.

Зауваження: Знаки *s*, що фігурують у фомулі як \pm_s\quadі \mp_s\quadє величинами залежними.

Рівняння (8) є [квадратним рівнянням](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D0%25B2%25D0%25B0%25D0%25B4%25D1%2580%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25BD%25D0%25B5_%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F) щодо *u*. Його розв'язок має вигляд

u={\pm_s\sqrt{\alpha + 2 y} \pm_t \sqrt{(\alpha + 2y) - 4(\alpha + y \pm_s {\beta \over 2\sqrt{\alpha + 2 y}})} \over 2}.\quad

Або, після спрощення

u={\pm_s\sqrt{\alpha + 2 y} \pm_t \sqrt{-\left(3\alpha + 2y \pm_s {2\beta \over \sqrt{\alpha + 2 y}} \right)} \over 2}.\quad

Це розв'язок канонічного квадратного рівняння. Розв'язок вихідного рівняння можна подати у вигляді

x=-{B \over 4A} + {\pm_s\sqrt{\alpha + 2 y} \pm_t \sqrt{-\left(3\alpha + 2y \pm_s {2\beta \over \sqrt{\alpha + 2 y}} \right)} \over 2}. \qquad\qquad (8')\quad

Важливо: Два знаки \pm_s\quadотримані з рівняння (7') є залежними, тому являють собою один і той самий знак, а знак \pm_t\quad — незалежний.

##### Підсумки методу Феррарі

Розв'язок рівняння четвертого степеня

 A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0, \quad

знаходиться після проведення обчислень:

 \alpha = - {3 B^2 \over 8 A^2} + {C \over A}, \quad

 \beta = {B^3 \over 8 A^3} - {B C \over 2 A^2} + {D \over A}, \quad

 \gamma = {-3 B^4 \over 256 A^4} + {C B^2 \over 16 A^3} - {B D \over 4 A^2} + {E \over A}, \quad

Якщо \beta=0\quadто доречно розв'язувати u^4+\alpha u^2 + \gamma = 0\quadі підстановкою x=u-{B\over 4A}\quadзнаходити корені

x=-{B\over 4A}\pm_s\sqrt{-\alpha\pm_t\sqrt{\alpha^2-4\gamma}\over 2},\qquad\beta=0\quad.

 P = - {\alpha^2 \over 12} - \gamma, \quad

 Q = - {\alpha^3 \over 108} + {\alpha \gamma \over 3} - {\beta^2 \over 8}, \quad

 R = {Q\over 2} \pm \sqrt{{Q^{2}\over 4}+{P^{3}\over 27}}\quad, (підходять обидва знаки [квадратного кореня](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D0%25B2%25D0%25B0%25D0%25B4%25D1%2580%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25BD%25D0%25B8%25D0%25B9_%25D0%25BA%25D0%25BE%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25BD%25D1%258C))

 U = \sqrt[3]{R}\quad, (в цього рівняння існують три комплексні корені, будь-який з них нас задовольнить)

 y = - {5 \over 6} \alpha -U + \begin{cases}U=0 &\to 0\\U\ne 0 &\to {P\over 3U}\end{cases}, \quad

W=\sqrt{ \alpha + 2 y}\quad

 x = - {B \over 4 A} + { \pm_s  W \pm_t \sqrt{-\left(3\alpha + 2 y \pm_s {2\beta\over W} \right) }\over 2 }.\quad

Два символи ±s повинні мати однакові знаки, а символ ±t — незалежний. Щоб знайти всі корені, треба знайти значення x для всіх комбінацій символів ±s,±t: спочатку тореба розв'язати для випадку +,+ , потім для +,− , далі — для −,+ і наостанок — для −,−. Корінь подвійної кратності ми отримаємо двічі, потрійної — тричі, а корінь кратності чотири — чотири рази (щоправда, у цьому випадку у нас був би випадок, коли *β* = 0, який не є загальним, а призводить до [біквадратного рівняння](file:///C:\wiki\%25D0%2591%25D1%2596%25D0%25BA%25D0%25B2%25D0%25B0%25D0%25B4%25D1%2580%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25BD%25D0%25B5_%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F)). Порядок коренів визначається тим, яке *U* було обрано.

### Інші методи

#### Швидке розв'язання (природне)

Попереднє розв'язання рівняння четвертого степеня харктеризується досить специфічними і неочевидними підстановками, що робить його важким для запам'ятовування.

Розглянемо інше розв'язання, яке є більш природним. Ідея полягає у тому, що потрібно розкласти поліном четвертого степеня у добуток [квадратичних](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D0%25B2%25D0%25B0%25D0%25B4%25D1%2580%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25BD%25D0%25B5_%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F) поліномів. Нехай


  \begin{array}{lcl}
   0 = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e & = & (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s) \\
   & = & x^4 + (p + r)x^3 + (q + s + pr)x^2 + (ps + qr)x + qs
  \end{array}
 \quad

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях *x*:


  \begin{array}{lcl}
   b & = & p + r \\
   c & = & q + s + pr \\
   d & = & ps + qr \\
   e & = & qs
  \end{array}
 \quad

Цю систему важче розв'язати, ніж здається, проте якщо почати з [канонічного рівняння четвертого степеня](file:///C:\wiki\%25D0%25A0%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F_%25D1%2587%25D0%25B5%25D1%2582%25D0%25B2%25D0%25B5%25D1%2580%25D1%2582%25D0%25BE%25D0%25B3%25D0%25BE_%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25BF%25D0%25B5%25D0%25BD%25D1%258F#.D0.BF.D0.B5.D1.80.D0.B5.D1.82.D0.B2.D0.BE.D1.80.D0.B5.D0.BD.D0.BD.D1.8F_.D0.B4.D0.BE_.D0.BA.D0.B0.D0.BD.D0.BE.D0.BD.D1.96.D1.87.D0.BD.D0.BE.D0.B3.D0.BE_.D1.80.D1.96.D0.B2.D0.BD.D1.8F.D0.BD.D0.BD.D1.8F_.D1.87.D0.B5.D1.82.D0.B2.D0.B5.D1.80.D1.82.D0.BE.D0.B), де b = 0\quad, ми отримаємо r = -p\quad, і:


  \begin{array}{lcl}
   c + p^2 & = & s + q \\
   d/p & = & s - q \\
   e & = & sq
  \end{array}
 \quad

Тепер можна легко виключити s\quadі q\quad:


  \begin{array}{lcl}
   (c + p^2)^2 - (d/p)^2 & = & (s + q)^2 - (s - q)^2 \\
   & = & 4sq \\
   & = & 4e
  \end{array}
 \quad

Якщо ми позначимо P = p^2\quad, то це рівняння перетвориться у [кубічне рівняння](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D1%2583%25D0%25B1%25D1%2596%25D1%2587%25D0%25BD%25D0%25B5_%25D1%2580%25D1%2596%25D0%25B2%25D0%25BD%25D1%258F%25D0%25BD%25D0%25BD%25D1%258F):

P^3 + 2cP^2 + (c^2 - 4e)P - d^2 = 0\,\quad

Нехай ми отримали p\quad, тоді:


  \begin{array}{lcl}
  r & = & -p \\
 2s & = & c + p^2 + d/p \\
 2q & = & c + p^2 - d/p
  \end{array}
 \quad

Підставивши отримані параметри p, q, r, s у квадратичні поліноми і розв'язавши їх, ми отримаємо розв'язок вихідного рівняння четвертого степеня. Якщо початкове рівняння було неканонічним, то треба здійснити зворотню заміну.

#### Чисельний (неаналітичний) розв'язок

Досить ефективним у розв'язанні рівнянь четвертого степеня є [метод парабол](file:///C:\wiki\%25D0%259C%25D0%25B5%25D1%2582%25D0%25BE%25D0%25B4_%25D0%25BF%25D0%25B0%25D1%2580%25D0%25B0%25D0%25B1%25D0%25BE%25D0%25BB), що знаходить не лише дійсні (на відміну від [методу бісекцій](file:///C:\w\index.php%3ftitle=%25D0%259C%25D0%25B5%25D1%2582%25D0%25BE%25D0%25B4_%25D0%25B1%25D1%2596%25D1%2581%25D0%25B5%25D0%25BA%25D1%2586%25D1%2596%25D0%25B9&action=edit&redlink=1)), але й комплексні значення коренів, до того ж цей метод без особливих труднощів розв'язує також рівняння з комплексними коефіцієнтами. Розглянемо цей метод.

Нехай заданий поліном f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4\quad, корені якого треба знайти.

Знайдемо один з цих коренів. Візьмемо три довільні (початкові) точки x_{-1}, x_0, x_1\quadз [комплексної площини](file:///C:\wiki\%25D0%259A%25D0%25BE%25D0%25BC%25D0%25BF%25D0%25BB%25D0%25B5%25D0%25BA%25D1%2581%25D0%25BD%25D0%25B0_%25D0%25BF%25D0%25BB%25D0%25BE%25D1%2589%25D0%25B8%25D0%25BD%25D0%25B0), єдина вимога: вони мають бути всі різними, а також різним має бути значення полінома у цих точках (часто беруть точки −1, 0, 1). Розглянемо такі 3 точки: (x_{-1},f(x_{-1})), (x_0,f(x_0)), (x_1,f(x_1))\quad. Оскільки через будь-які 3 точки з різними [абсцисами](file:///C:\w\index.php%3ftitle=%25D0%2590%25D0%25B1%25D1%2581%25D1%2586%25D0%25B8%25D1%2581&action=edit&redlink=1) можна провести параболу (яка, щоправда, може вироджуватися у пряму), то проведемо цю параболу. Нехай її рівняння має вигляд ax^2+bx+c\quad. Прирівнявши це рівняння до нуля, ми отримаємо корені z_1, z_2\quad(які, взагалі кажучи, є комплексними числами, а тому завжди існують). Візьмемо за x_2\quadте з чисел z_1, z_2\quad, яке найменше відрізняється (за [модулем](file:///C:\wiki\%25D0%259C%25D0%25BE%25D0%25B4%25D1%2583%25D0%25BB%25D1%258C)) від x_1\quad. Надалі розглядатимемо трійку чисел x_0, x_1, x_2\quad. І так далі. Варто сказати, що послідовність (x_n)\quadдосить швидко збігається до одного з коренів: відшукання кореня із точністю у 10 значущих цифр може бути досягнуто за 20 кроків.

Після того, як ми знайшли один з коренів (позначимо його через \overline{x}\quad), слід поділити весь поліном на двочлен x-\overline{x}\quad. Після цього ми отримаємо кубічний поліном, для якого також можна знайти один з коренів методом парабол. Після відповідного ділення ми отримаємо квадратичний поліном, після розв'язання якого ми отримаємо решту коренів початкового рівняння.

Внаслідок універсальності цього методу, його можна застосовувати не тільки для розв'язання рівнянь четвертого степеня, а й для рівнянь вищих степенів.