Основні методи розв’язування рівнянь

Розклад на множники за допомогою групування

Члени многочлена групуються так, щоб вони мали спільний множник, який виноситься за дужки.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Групуємо два перші та два останні члени:

,

а далі виносимо за дужки спільний множник :

, .

**Приклад.** Розглянемо рівняння

.

* Віднімемо і додамо , а число 20 розіб’ємо на два доданки 16 і 4:



Рівняння розпадається на два рівняння:

 .

Використання формул скороченого множення

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Подамо ліву частину рівняння у вигляді добутку:

.

Рівняння розпадається на два рівняння:

, 

, .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Розкладемо ліву і праву частини рівняння на множники:



Дістанемо рівняння

,

яке розпадається на два рівняння:

, ,

, .

Виділення повного квадрата або куба двочлена

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Виділимо повні квадрати:

,

, .

Остаточно маємо:

, ;

, .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Виділимо повний куб двочлена:

, , . ⮘

У разі виділення повного куба деякі кубічні рівняння можна перетворити до вигляду

, або .

Далі з розкладів

,



знаходимо  за формулою:

. (1)

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Знайдемо  згідно з формулою (1):

.

Далі, скориставшись розкладом

,

запишемо рівняння у вигляді

, ,

, .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Знайдемо  згідно з формулою (1):

.

Подавши початкове рівняння у вигляді

,

помноживши його на 9 і скориставшись розкладом куба суми

,

дістанемо:

, ,

,  .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Знайдемо  згідно з формулою (\*):

.

Скориставшись розкладом

,

перепишемо початкове рівняння у вигляді:

, ;

**Приклад.** Поділимо многочлен



на двочлен :



Це ділення можна виконати за схемою Горнера:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | – 1 | 1 | – 4 | 6 |
| *х* = 2 | 2 | 2 ⋅ 2 – 1 = 3 | 2 ⋅ 3 + 1 = 7 | 2 ⋅ 7 – 4 = 10 | 2 ⋅ 10 + 6 = 26 |

Коефіцієнти частки  та остачу від ділення, що дорівнює 26, знаходимо за схемою Горнера.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Раціональні корені рівняння можуть бути лише дільниками числа 6: . За схемою Горнера знаходимо:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | – 4 | 1 | 6 |
| *х* = – 1 | 1 | – 5 | 6 | 0 |
| *х* = 2 | 1 | – 3 | 0 |  |
| *х* = 3 | 1 | 0 |  |  |

Отже, . Якщо корінь вибрано невдало, то останнє число в рядку не дорівнюватиме нулю.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Раціональні корені шукаємо з-поміж дільників числа 9: ; ; . За схемою Горнера маємо

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | – 2 | – 18 | – 6 | 9 |
| *х* = 1 | 1 | – 1 | – 19 | – 25 | – 16 |
| *х* = – 1 | 1 | – 3 | – 15 | 9 | 0 |
| *х* = 3 | 1 | 0 | – 15 | – 36 |  |
| *х* = – 3 | 1 | – 6 | 3 | 0 |  |

Зі схеми випливає, що значення ,  не задовольняють рівняння, а коренями будуть , . Часткою від ділення даного многочлена на  буде многочлен . Рівняння  має корені .

Застосування теореми Гаусса

Якщо многочлен не має раціональних коренів, то схема Горнера не прийнятна, оскільки не можна вгадати ірраціональні корені.

У такому разі потрібно спробувати розкласти многочлен з цілими коефіцієнтами на квадратні множники з цілими коефіцієнтами.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Це рівняння не має раціональних коренів.

Спробуємо розкласти даний многочлен на два квадратні множ­ники з цілими коефіцієнтами:

.

Розкриваючи дужки і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях , дістаємо систему рівнянь:

,

де  — цілі числа. З останнього рівняння знаходимо, що можливі такі випадки:

1) ; 2) ; 3) ; 4)  ; 5) ; 6) ; 7) ; 8)  .

Оскільки квадратичні множники перестановочні, то випадки 1—4 повторюють випадки 5—8. Тому розглядатимемо лише випадки 1—4.

1. . Із системи рівнянь



знаходимо .

Оскільки  не є цілим числом, то розкладання на квадратичні множники з цілими коефіцієнтами неможливе.

2. . З системи рівнянь



знаходимо .

Значення  не є цілим числом.

3. . Із системи рівнянь



знаходимо .

Значення  не є цілим числом.

4. . Із системи рівнянь



знаходимо .

Перевіряємо, чи виконується рівність :  . Отже, маємо розклад на множники:

.

Розв’язуємо відповідні квадратні рівняння:

, ,

, . ⮘

Корені щойно розглянутого рівняння — ірраціональні числа. Проте викладений спосіб розкладання на множники можна застосовувати й у разі, коли рівняння має раціональні корені.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Шукаємо розклад лівої частини рівняння на квадратні множники у вигляді:

 .

Приходимо до системи рівнянь із цілими коефіцієнтами :

.

Узявши , дістанемо систему рівнянь



звідки знайдемо 

Отже, маємо шуканий розклад на множники:

.

Остаточно маємо:

, ,

, .

Рівняння, що зводяться до квадратних рівнянь

Розглянемо типи рівнянь, які зводяться до квадратних.

Двочленні рівняння

***Двочленними рівняннями*** називають рівняння виду

, .

Розв’язок рівнянь складається в розкладанні рівняння на множ­ники.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Розкладаючи ліву частину рівняння на множники, дістаємо:

, , .

Тричленні рівняння

***Тричленними рівняннями*** називають рівняння виду

, .

Заміною  зводимо тричленне рівняння до квадратного.

**Приклад.** Розв’язати рівняння .

* Виконавши заміну , дістанемо , звідки , , , , .

При  тричленне рівняння називають ***біквадратним***.

**Приклад.** Розв’язати рівняння.

* , , , , , , .

Заміна змінної в рівнянні

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Виконавши заміну , дістанемо

,

звідки випливає квадратне рівняння , .

Повертаючись до попередніх позначень дістаємо:

якщо , то ; якщо , .

Попереднє перетворення рівнянь

**1. Рівняння вигляду**

.

Поділимо чисельник і знаменник кожного дробу в лівій части­ні рівняння на :

,

а далі заміною  зводимо це рівняння до квадратного рів­няння.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Поділимо чисельник і знаменник кожного дробу в лівій частині рівняння на 

.

Заміною  зведемо це рівняння до квадратного рівняння:

, .

Повертаючись до початкових позначень, дістаємо:

, .

, .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Поділимо чисельник і знаменник кожного дробу на :

.

Виконуючи заміну , послідовно дістаємо:

, , .

Повертаючись до початкових позначень, маємо:

, ;

, , .

**2. Рівняння вигляду**

, . (1)

Групуємо члени:

.

Заміною  зводимо дане рівняння до квадратного:

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Розкладемо на множники

.

Оскільки , то групуємо перший і четвертий, а також другий і третій множники:

.

Виконуючи заміну , дістаємо:

,, .

Повертаючись до початкових позначень, маємо:

, ,

, .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Щоб звести дане рівняння до рівняння виду (1), помножимо третій і четвертий множники на 2 і 6:

.

Оскільки 5 + 5 = 4 + 6, то групуємо перший і другий, а також третій і четвертий множники:

.

Позначимо , тоді ,  .

Остаточно дістанемо:

, ,

, , .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Зводимо рівняння до вигляду (1):

.

Оскільки – 1 – 4 = – 2 – 3, то групуємо перший і четвертий, а також другий і третій множники:

.

Скориставшись заміною , дістанемо:

, .

Повертаючись до початкових позначень, розв’язуємо такі рівняння:

, , ;

, , .

**3. Рівняння виду**

**** (2)

Поділивши обидві частини даного рівняння на , дістанемо:

.

Заміною  зводимо це рівняння до квадратного:

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Це рівняння не має кореня , тому можемо поділити обидві його частини на :

.

Виконавши заміну , дістанемо квадратне рівняння

, розв’язки якого .

Повертаючись до початкових позначень, остаточно знаходимо:

, ;

, .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Щоб звести це рівняння до вигляду (2), позначимо , . Виконавши заміну, дістанемо рівняння виду (2):

.

Поділимо обидві частини цього рівняння на :

.

У результаті заміни  дістанемо квадратне рівняння , розв’язки якого .

Повертаючись до початкових позначень, дістаємо:

, , ,

, , .

**4. Рівняння вигляду**

 (3)

Поділивши обидві частини даного рівняння на , дістанемо:

.

Це рівняння заміною  зводиться до квадратного:

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Поділимо обидві частини цього рівняння на :

.

Заміною  зводимо це рівняння до квадратного:

, , .

Повертаючись до початкових позначень, дістаємо:

, ,

, .