**4.3 Ірраціональні рівняння.**

***Ірраціональним*** називають таке рівняння, ліва і права частини якого є алгебраїчними виразами, хоча б один із яких ірраціональний.

Нагадаємо, що ***ірраціональними*** називають такі алгебраїчні вирази, які крім дій додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня з натуральним показником містять також і дії добування кореня m-го степеня.

Ірраціональні вирази виду  називають також радикалами.

Приклади ірраціональних рівнянь:

; ; .

В елементарній алгебрі розглядаються лише такі ірраціональні рівняння, в яких радикали парного степеня припускаються арифметичними (невід’ємними), а непарного степеня — додатними або від’ємними, залежно від знака підкореневого виразу.

*Загальний метод розв’язування ірраціонального рівняння полягає в тому, що спочатку ізолюють один радикал, а далі обидві частини рівняння підносять до степеня, потім знову ізолюють радикал і т. д. Будь-яке ірраціональне рівняння піс­ля скінченної кількості таких перетворень можна звести до раціонального.*

Рівняння, яке дістаємо в результаті, узагалі кажучи, не еквівалентне заданому. Тому, знайшовши розв’язки цього рівняння, потрібно перевірити їх підставленням у дане рівняння і відкинути як сторонні ті з них, які не є розв’язками. Проте якщо обидві ча­стини ірраціонального рівняння підносились до **непарного** степеня, то перевіряти розв’язок не обов’язково, бо в цьому разі прийдемо до рівняння, еквівалентного даному.

Якщо рівняння містить радикали з невідомим у знаменнику, то його потрібно звільнити від знаменника, виконавши відповідні перетворення.

Перш ніж приступити до розв’язування ірраціонального рівняння, доцільно визначити ***область допустимих значень*** (ОДЗ) для невідомого. У деяких випадках після цього відпадає потреба в розв’язанні.

Нехай, скажімо, маємо рівняння

.

Для першого радикала ОДЗ становлять значення , а для другого . Отже, у множині дійсних чисел це рівняння не має розв’язків (не існує дійсних значень *х*, для яких обидва підкореневі вирази невід’ємні).

Розв’язуючи ірраціональне рівняння, необхідно також перевірити область допустимих значень.

Розв’язування найпростіших ірраціональних рівнянь із відшуканням ОДЗ

**Приклад.** Розв’язати ірраціональне рівняння



* Добуток двох множників дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли принаймні один із них дорівнює нулю. Отже, маємо: .

Значення ,  не входять в ОДЗ  рівняння і не є його коренями.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Знаходимо корені рівнянь  і : , , . Корінь  сторонній, оскільки він не входить в ОДЗ .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Рівняння має очевидний корінь , що не входить в ОДЗ  і є стороннім. Поділивши обидві частини рівняння на *х* – 2, дістанемо:

, , . ⮘

Зауважимо, що іноді перш ніж розв’язувати рівняння, доцільно з’ясувати, чи можуть його ліва та права частини бути рівними між собою. Якщо ні, то рівняння, очевидно, не має розв’язків.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Знайшовши ОДЗ , доходимо висновку, що там виконується нерівність , звідки .

Тому дане рівняння не має розв’язків.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Знаходимо ОДЗ із нерівностей:

 

Звідси випливає, що .

Рівняння розв’язків не має.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Знаходимо ОДЗ: . В ОДЗ права частина рівняння від’ємна, а ліва частина невід’ємна. Рівняння не має розв’язків, .

Піднесення обох частин рівняння до квадрата

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Підносимо обидві частини рівняння до квадрата:



звідки.

Значення  не є коренем рівняння, оскільки при *х* = 0 обидва підкореневі вирази від’ємні.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Підносимо обидві частини рівняння до квадрата:



звідки відразу знаходимо , а далі після відповідних перетворень маємо:

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Підносимо обидві частини рівняння до квадрата:

.

Після зведення подібних членів дістаємо:

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Виконаємо перетворення:

.

Піднісши обидві частини останнього рівняння до квадрата, дістанемо:

.

Знайдене значення *х* не задовольняє рівняння, а отже, .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Підносимо обидві частини рівняння до квадрата:

,

а далі знову підносимо обидві частини перетвореного рівняння до квадрата:

.

Значення ,  не задовольняють дане рівняння.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Підносимо обидві частини рівняння до квадрата:

.

Після перетворень дістаємо:

.

Метод заміни

Нерідко заміною підкореневого виразу можна звести ірраціональне рівняння до раціонального.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Позначивши , дістанемо рівняння

 або  звідки .

Повертаючись до початкових позначень, маємо:

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Позначивши , дістанемо рівняння

 або  звідки .

Повертаючись до початкових позначень, маємо:

 .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Позначивши , дістанемо рівняння

, звідки .

Повертаючись до початкових позначень, маємо:

;

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Позначивши , дістанемо рівняння

 звідки .

Повертаючись до початкових позначень, маємо:

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Позначимо  тоді .

Розв’язуючи рівняння:  дістаємо:   .

Остаточно маємо: .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Позначивши , дістанемо рівняння

 або  звідки .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Виконаємо таке перетворення:

,

.

Скориставшись заміною , дістанемо:

, звідки .

Повертаємось до початкових позначень:

,

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Позначимо . Тоді дане рівняння набере вигляду

 звідки  .

Рівняння  розв’язків не має.

Розв’язуючи рівняння , дістаємо: .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Позначивши , дістанемо рівняння

 звідки  .

Повертаючись до початкових позначень, маємо:



Корінь  — сторонній.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Позначивши , дістанемо рівняння

, звідки .

Повернувшись до початкових позначень, знайдемо  .

Виділення повного квадрата

Розв’язуючи ірраціональні рівняння, часто використовують *метод* *виділення повного квадрата*.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Виділимо під радикалами повний квадрат

,

або

.

Розв’язуючи це рівняння на проміжках    , знаходимо корені , .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Позначивши , дістанемо рівняння

.

Звідси випливає: .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Перетворимо ліву частину рівняння:

,

або .

Далі маємо:



або  звідки .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Під знаком кореня маємо повний квадрат:

,

.

Знаходимо ОДЗ:





З першої системи визначаємо . Корінь  — сторонній.

З другої системи маємо .

Корінь  — сторонній.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Виділяємо повний квадрат:

.

У результаті заміни  дістаємо рівняння

.

Позначивши , запишемо систему:



Узявши , дістанемо систему



Віднімаючи почленно друге рівняння від першого, маємо:

 звідки .

Розв’язуємо останнє рівняння:

.

Оскільки  то .

Множення обох частин рівняння на вираз, спряжений до виразу в лівій частині

**Приклад.** Розв’язати рівняння

. (1)

* Помножимо обидві частини рівняння на вираз, спряжений до виразу в лівій частині:



.

Після перетворень дістаємо рівняння

,

або

. (2)

Маємо корінь рівняння . З рівнянь (1), (2) випливає:

.

Підносимо обидві частини цього рівняння до квадрата:

 звідки .

Корінь  не задовольняє рівняння.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Ліву і праву частини рівняння помножимо і поділимо на відповідні спряжені вирази:



.

Виконавши перетворення, дістенемо рівняння

,

ліва і права частини якого мають спільний множник  .

**Приклад.** Розв’язати рівняння



з кубічними ірраціональностями.

* Помноживши ліву і праву частини даного рівняння на вираз , спряжений до суми першого та третього до-  
  данків.

Дістанемо різницю кубів:

.

Звідси після спрощень маємо:

.

Виконавши заміну , , дістанемо:

, , ; , .

Однорідні ірраціональні рівняння

Рівняння виду



називається ***однорідним***. Воно зводиться до квадратного рівняння заміною

.

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

* Скориставшись позначенням

,

дістанемо рівняння

, звідки , .

Переходячи до початкових позначень, маємо:

, .

**Приклад.** Розв’язати рівняння

.

Поділивши обидві частини рівняння на *х*, дістанемо:

.

Візьмемо , тоді , звідки .

У початкових позначеннях маємо:

, , , .

Корінь  не задовольняє рівняння.

Розклад на множники

# Приклад. Розв’язати рівняння

.

* Знайдемо спочатку ОДЗ з нерівностей

, , ;

ОДЗ: ; .

Винесемо спільний множник за дужки:

.

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата і виконаємо відповідні перетворення:

;

.

Остаточно маємо: , .

# Приклад. Розв’язати рівняння

.

* Винісши корінь четвертого степеня за дужки і виконавши відповідні перетворення, дістанемо:

, , , .

# Приклад. Розв’язати рівняння

.

* Виносимо  за дужки і виконуємо перетворення:

, .

Остаточно маємо:

, , , .

**Приклад**. Розв’язати рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image004.gif

**Розв’язання.**  Піднесемо обидві сторони рівняння до квадрату. Отримаємо

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image006.gif

Звідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image008.gif

**Відповідь:** 2.

**Приклад.** Розв’язати рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image010.gif

**Розв’язання.**  Зведемо до спільного знаменника:

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image012.gif

 Отримаємо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image014.gif Звідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image016.gif

**Відповідь:** 4.

**Приклад.** Розв’язати рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image018.gif

**Розв’язання.**  Оскільки в ОДЗ входять значення http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image020.gif такі, що

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image022.gif і http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image024.gif

то http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image026.gif Крім цього,  повинна виконуватися умова http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image028.gif, тобто http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image030.gif, відповідно до області визначення функції http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image032.gif. Розв’яжемо рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image034.gif

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image036.gif

Корінь http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image038.gif відкидаємо, оскільки http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image040.gif

**Відповідь:** 10.

**Приклад.** Визначити добуток розв’язків рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image042.gif

**Розв’язання.** Знайдемо ОДЗ: http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image044.gif Помножимо і поділимо ліву частину рівняння на вираз http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image046.gif. Отримаємо

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image048.gif

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image050.gif

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image052.gif

Отже, http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image054.gif Звідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image056.gif

**Відповідь:** -441.

**Приклад.** Визначити найбільший розв’язок рівняння

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image058.gif

**Розв’язання.** Зрозуміло, що http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image060.gif — один із розв’язків рівняння. Поділимо рівняння на http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image062.gif. Отримаємо

http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image064.gif

Позначимо http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image066.gif Отримаємо квадратне рівняння http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image068.gif Звідси http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image070.gif  http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image072.gif Маємо два випадки:

**1)  http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image074.gif**

**2) http://www.lnu.edu.ua/faculty/preuniv/5/r5_image076.gif**дійсних розв’язків немає.

**Відповідь:** 9.

**Приклад.** Розв’язати ірраціональне рівняння

 .

* Піднесемо обидві дві частини рівняння до квадрата:

, , .

Унаслідок піднесення обох частин рівняння до квадрата ОДЗ розширюється і з’являється сторонній корінь , який є коренем рівняння

.

Підносячи до квадрата обидві частини рівняння дістаємо рівняння .



Розв’язати рівняння на ОДЗ (**1**—**6**). *Відповідь*

**1.** . – 6

**2.** . ∅

**3.** . 4

**4.** . 1

**5.** . 3

**6.** . ∅

## Піднесення обох частин рівняння до квадрата (7—11)

**7.** . – 1

**8.** . 

**9.** . 

**10.** . 

**11.** . 3

## Метод заміни (12—26)

**12.** . 7

**13.** . 

**14.** . 5

**15.** . 1; 4

**16.** . ∅

**17.** . 

**18.** . – 1

**19.** . – 7; 2

**20.** . 1

**21.** . –6; 3

**22.** . 1

**23.** . 2

**24.** . 27

**25.** . 2; 3

**26.** . 4

## Виділення повного квадрата (27—35)

**27.** . 

**28.** . –2; 0

**29.** . ∅

**30.** . 

**31.** . 5

**32.** . 

**33.** . 

**34.** . 

**35.** . 2

## Множення на спряжений вираз (36—40)

**36.** . 

**37.** . 

**38.** . ∅

**39.** . 

**40.** . 4

## Розв’язати різні ірраціональні рівняння (41—75)

**41.** . – 1

**42.** . 

**43.** . – 2; –1; 2

**44.** . 1; 2; 3

**45.** . 6

**46.** . 

**47.** . 

**48.** . 

**49.** . 5

**50.** . 

**51.** . 3

**52.** . 1

**53.** . 2; 9

**54.** . 2

**55.** . 7; 38

**56.** . 

**57.** . 7

**58.** . 

**61.** . – 2; – 4

**62.** . 

**63.** . 1

**64.** . ∅

**65.** . ∅

**66.** . 31

**67.** . 81

**68.** . 0; 7

**69.** . – 3,2; 3

**70.** . – 1

**71.** . – 1; – 3

**72.** . 3; – 24; – 88

**73.** . 1; 2; 10

**74.** . 8

**75.** . 3

. – 2; – 4

**62.** . 

**63.** . 1

**64.** . ∅

**65.** . ∅

**66.** . 31

**67.** . 81

**68.** . 0; 7

**69.** . – 3,2; 3

**70.** . – 1

**71.** . – 1; – 3

**72.** . 3; – 24; – 88

**73.** . 1; 2; 10

**74.** . 8

**75.** . 3

Розв’язати систему рівнянь (**76**—**90**)

**78.** . 6; 10; 10; 6

**79.** . 1; 4; 4; 1

**80.** . 1; 8; 8; 1

**81.** . 

**82.** . 5; 3

**83.** . 5; 4

**84.** . 0; 0

**85.** . 1; 1; 1

**86.** . 5; 3; 5; 4

**87.** . 

**88.** . – 4; 5; 3

**89.** . 4; 1; 1; 4; – 4; – 1; – 1; – 4

**90.** . 11; 1