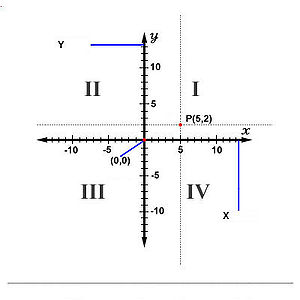
# Системи координат в елементарній математиці

*В цій статті даються роз'яснення до найбільш уживаних систем координат з елементарної матиматики. Докладнішу інформацію про системи координат можна знайти у статті* [*Системи координат*](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82)*.*

**Координати** точки — це набір чисел, або точніше [кортеж](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%B6) чисел, який визначає її розташування на [площині](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%BE%D1%89%D0%B8%D0%BD%D0%B0) або в просторі.

**Система координат** — це площина або простір, в якому визначений [початок координат](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D1%87%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BA_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) та [осі](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%96%D1%81%D1%8C_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82), що є необхідними передумовами для обчислення координат точки.

## Декартові координати

[](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Cartesiancoordinates2D.JPG)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Cartesiancoordinates2D.JPG)

Координатна площина з 4 чвертями.

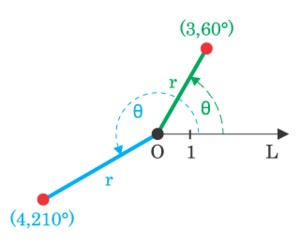
В двововимірній [системі Декартових координат](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82), розташування точки *P* на *xy*-площині визначається парою чисел (*x*,*y*).

* *x* — відстань від точки P до осі *y* або значення [абсциси](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D1%86%D0%B8%D1%81%D0%B0) (з урахуванням знаку)
* *y* — відстань від точки P до осі *x* або значення [ординати](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%B0) (з урахуванням знаку)

В тривимірній системі [Декартових координат](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82), точка P в *xyz*-просторі локалізується вже за допомогою трьох параметрів: (*x*,*y*,*z*).

* *x* — відстань від точки P до площини *yz*
* *y* — відстань від точки P до площини *xz*
* *z* — відстань від точки P до площини *xy*

## Полярні координати

[](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:CircularCoordinates.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:CircularCoordinates.png)

Полярні координати.

[**Полярна система координат**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) — це така система координат, в якій розташування точки визначається парою чисел, одне з яких визначає відстань по прямій лінії від заданої точки до початку координат (так званого **полюса**), а інші — кути, утворені цією лінією з осями системи координат.

Терміном *полярні координати* користуються для полярної системи координат на площині. Для орієнтації в просторі застосовують [циліндричні](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82_%D0%B2_%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BD%D1%96%D0%B9_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%86%D1%96#.D0.A6.D0.B8.D0.BB.D1.96.D0.BD.D0.B4.D1.80.D0.B8.D1.87.D0.BD.D1.96_.D0.BA.D0.BE.D0.BE.D1.80.D0.B4.D0.B8.D0.BD.D0.B0.D1.82.D0.B8) та [сферичні](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82_%D0%B2_%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BD%D1%96%D0%B9_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%86%D1%96#.D0.A1.D1.84.D0.B5.D1.80.D0.B8.D1.87.D0.BD.D1.96_.D0.BA.D0.BE.D0.BE.D1.80.D0.B4.D0.B8.D0.BD.D0.B0.D1.82.D0.B8) системи координат.



**1.**У прямокутній системі координат дано точки *M*1(0; 5), *М*2(–3; 0), *М*3 1)*.* Знайти їхні полярні координати.

*Відповідь.* *M*1(5; π/2), *M*2(3; π), *М*3(2; π/6).

**2.** У полярній системі координат дано точки *А*(4; π/2) і *В*(8, –π/4). Знайти їхні прямокутні координати.

*Відповідь. А*(0; 4), *В*; –4).

**3.** У полярній системі координат дано точки *А*(8; 2π/3) і *В*(6; π/3). Знайти полярні координати середини відрізка, що сполучає точки *А* і *В.*

*Відповідь.* (1; 2π/3).



1. Що називається системою координат?

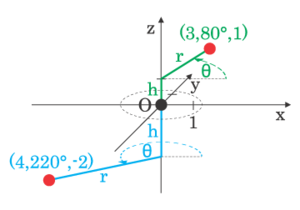
2. Що таке полярні координати точки?

3. В яких межах змінюються полярні координати?

4. Вивести формули, що встановлюють зв’язок між полярними координатами точки та її прямокутними координатами.

## Циліндричні координати

[**Циліндрична система координат**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B8%D0%BB%D1%96%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) — це тривимірна полярна система координат.

[](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:CylindricalCoordinates.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:CylindricalCoordinates.png)

Циліндричні координати.

В циліндричній системі координат, точка P репрезентується трикомпонентним кортежем (*r*,θ,*h*). В термінах [Декартової системи координат](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82),

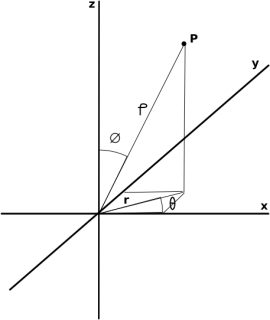
* 0\leq{r}([радіус](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D1%96%D1%83%D1%81" \o "Радіус)) — відстань від осі *z* до точки P,
* 0\leq\theta<360^\circ([азимут](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B7%D0%B8%D0%BC%D1%83%D1%82) або [довгота](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%B2%D0%B3%D0%BE%D1%82%D0%B0)) — кут між позитивною («плюсовою») частиною осі *x* та прямої лінії, уявно проведеної від полюса до точки P, зпроектованої на *xy*-площину
* *h* (висота) — відстань (з врахуванням знаку) від *xy*-площини до точки P.

Примітка: в літературі можна зустріти позначку *z* для *h*; це не принципово, але потрібно слідкувати, які позначки застосовуються.

Полярні координати мають один недолік: значення θ втрачає сенс, якщо *r* = 0.

Циліндричні координати корисні для вивчення систем, симетричних навколо якоїсь осі. Наприклад, нескінченно довгий циліндр в Декартових координатах має рівняння 2*x* + 2*y* = 2*c*, тоді як в циліндричних воно виглядає як r=c

## Сферичні координати

[](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Spherical_Coordinates.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Spherical_Coordinates.png)

Сферичні координати.

[**Сферична система координат**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) — це тривимірна полярна система координат.

#### Позначення, прийняті в Америці

В сферичній системі координат, розташування точки P визначається трьома компонентами:(ρ,φ,θ). В термінах Декартової системи координат,

* 0\leq\rho([радіус](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D1%96%D1%83%D1%81" \o "Радіус)) — це відстань від точки Р до полюса,
* 0\leq\phi\leq 180^\circ([широта](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B8%D1%80%D0%BE%D1%82%D0%B0) або [полярний кут](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BA%D1%83%D1%82&action=edit&redlink=1)) — кут між *z*-віссю і прямою, проведеною з полюсу до точки P
* 0\leq\theta<360^\circ([азимут](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B7%D0%B8%D0%BC%D1%83%D1%82) або [довгота](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%B2%D0%B3%D0%BE%D1%82%D0%B0)) — кут між позитивною («плюсовою» *x*-віссю та [проекцією](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F) прямої, проведеною з полюсу до точки P на *xy*-площину.

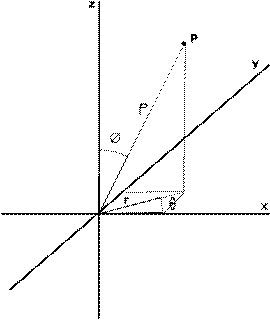
Примітка: в літературі можна зустріти позначку φ або θ , а також *r* для ρ;

Сферична система координат також має недолік: φ втрачає сенс якщо ρ = 0, також і θ втрачає сенс, якщо ρ = 0 або φ=0 or φ=180°.

Для побудови точки за її сферичними координатами, потрібно: від полюсу відкласти відрізок, рівний ρ уздовж позитивної *z*-осі, повернути його на кут φ навколо осі *y* у напрямі позитивної *x*-осі, та повернути на кут θ навколо *z*-осі в напряму позитивної *y*-осі.

Сферичні координати корисні при вивченні систем, симетричних навколо точки. Так, рівняння сфери в Декартових координатах виглядає як *x*2 + *y*2 + *z*2 = *c*2, тоді як в сферичних стає набагато простішим: ρ = *c*.

#### Європейські позначення

В Європі заведено використовувати інші позначення. Положення точки задається числами:  (r, \theta, \varphi) , де r — віддаль від точки до початку координат, θ — полярний кут, який змінюється в межах від 0 до π,  — азимутальний кут, який змінюється в межах від 0 до 2π. Тобто, в європейській системі, яка застосовується також і в Україні, позначення для кутів переставлені у порівнянні з американською.

## Перехід від однієї системи координат до іншої

### Декартові та полярні

x=r\,\cos\theta \quad

y=r\,\sin\theta \quad

r=\sqrt{x^2 + y^2}

\theta
= \arctan\frac{y}{x} + \pi u_0(-x) \, \operatorname{sgn} y 

де *u0* — [функція Хевісайда](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F_%D0%A5%D0%B5%D0%B2%D1%96%D1%81%D0%B0%D0%B9%D0%B4%D0%B0) з *u*0(0) = 0, а *sgn* — [функція signum](http://uk.wikipedia.org/wiki/Signum-%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F). Тут функції *u0* та *sgn* використовуються як «логічні» [перемикачі](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D1%87&action=edit&redlink=1), аналогічні за значенням операторам «якщо..то» (if…else) в мовах програмування. Деякі мови програмування мають спеціальну функцію *atan2(y, x)*, яка знаходить вірне значення *θ* в необхідному квадранті, визначеному *x* та *y*.

### Декартові та циліндричні

x=r\,\cos\theta

y=r\,\sin\theta

z=h \quad

r=\sqrt{x^2 + y^2}

\theta
=\arctan\frac{y}{x} + \pi u_0(-x) \, \operatorname{sgn} y 

h=z \quad

\begin{vmatrix}dx\\dy\\dz\end{vmatrix}=
\begin{vmatrix}
\cos\theta&-r\sin\theta&0\\
\sin\theta&r\cos\theta&0\\
0&0&1
\end{vmatrix}\cdot
\begin{vmatrix}dr\\d\theta\\dh\end{vmatrix}

\begin{vmatrix}dr\\d\theta\\dh\end{vmatrix}=
\begin{vmatrix}
\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}&0\\
\frac{-y}{x^2+y^2}&\frac{x}{x^2+y^2}&0\\
0&0&1
\end{vmatrix}\cdot
\begin{vmatrix}dx\\dy\\dz\end{vmatrix}

### Декартові та сферичні

{x}=\rho \, \sin\phi \, \cos\theta \quad 

{y}=\rho \, \sin\phi \, \sin\theta \quad 

{z}=\rho \, \cos\phi \quad 

{\rho}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}

{\phi}=\arccos\frac{z}{\rho}

{\phi}=\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}

{\theta}
=\arctan\frac{y}{x} + \pi\, u_0(-x)\, \operatorname{sgn} y 

\begin{vmatrix}dx\\dy\\dz\end{vmatrix}=
\begin{vmatrix}
\sin\phi\cos\theta&\rho\cos\phi\cos\theta&-\rho\sin\phi\sin\theta\\
\sin\phi\sin\theta&\rho\cos\phi\sin\theta&\rho\sin\phi\cos\theta\\
\cos\phi&-\rho\sin\phi&0
\end{vmatrix}\cdot
\begin{vmatrix}d\rho\\d\phi\\d\theta\end{vmatrix}

\begin{vmatrix}d\rho\\d\phi\\d\theta\end{vmatrix}=
\begin{vmatrix}
\frac{x}{\rho}&\frac{y}{\rho}&\frac{z}{\rho}\\
\frac{xz}{\rho^2\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{yz}{\rho^2\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{-(x^2+y^2)}{\rho^2\sqrt{x^2+y^2}}\\
\frac{-y}{x^2+y^2}&\frac{x}{x^2+y^2}&0
\end{vmatrix}\cdot
\begin{vmatrix}dx\\dy\\dz\end{vmatrix}

### Циліндричні та сферичні

{r}=\rho \,\sin\phi

{\theta}=\theta \quad

{h}=\rho \,\cos\phi

{\rho}=\sqrt{r^2+h^2}

{\phi}
=\arctan\frac{h}{r} + \pi \, u_0(-r) \, \operatorname{sgn} h 

{\theta}=\theta \quad

\begin{vmatrix}dr\\d\theta\\dh\end{vmatrix}=
\begin{vmatrix}
\sin\phi&\rho\cos\phi&0\\
0&0&1\\
\cos\phi&-\rho\sin\phi&0
\end{vmatrix}\cdot
\begin{vmatrix}d\rho\\d\phi\\d\theta\end{vmatrix}

\begin{vmatrix}d\rho\\d\phi\\d\theta\end{vmatrix}=
\begin{vmatrix}
\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}&0&\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\\
\frac{-h}{r^2+h^2}&0&\frac{r}{r^2+h^2}\\
0&1&0
\end{vmatrix}\cdot
\begin{vmatrix}dr\\d\theta\\dh\end{vmatrix}