***геометричні місця точок на площині і в просторі***

Поняття геометричного місця точок у просторі (ГМТ) має велике методичне і загальноосвітнє значення. Неможливо переоцінити його роль у розвитку просторової уяви.

Розв'язування задач, в яких застосовуються геометричні місця точок як на площині, так і в просторі, активізують творчу думку і фантазію, розвивають логічне мислення, кмітливість, змушують перебирати в пам’яті всі відомі теореми з метою відбору і застосування найбільш придатної з них.

Однак, між ГМТ на площині і ГМТ у просторі є принципова різниця.

У планіметрії ГМТ можна побудувати за допомогою креслярських інструментів. Наприклад, коло побудувати за допомогою циркуля, пряму, промінь, відрізок − за допомогою лінійки.

У стереометрії не існує реального інструмента ''сферографа", щоб побудувати у просторі сферу або лінію перетину двох сфер, якщо вона існує.

Звичайно, ці побудови можна здійснити на проекційному кресленні, але виконання їх у більшості випадків громіздке, потребує багато часу і неабияких креслярських знань і навичок.

У просторі доводиться обмежуватись "уявним" проведенням прямих, площин, сфер тощо. Можливість таких побудов встановлюється певними аксіомами.

Що ж таке геометричне місце точок у просторі?

На площині ГМТ визначається так:

*Геометричним місцем точок називається фігура, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.*

Якщо на площині розглядається геометричне місце тільки точок, то у просторі можна розглядати геометричні місця не тільки точок, але й ліній (як прямих, так і кривих), і тому можна дати таке означення ГМТ у просторі:

*Геометричним місцем точок у просторі називається деяка фігура, що складається з усіх об’єктів простору, положення яких задовольняє одній або кільком певним умовам.*

У цьому формулюванні замість слова "точка" застосовується термін «об’єкт», бо це більш широке поняття і включає в себе не тільки точки, але й лінії. При цьому часто одну і ту ж геометричну фігуру можна розглядати як геометричне місце точок і як геометричне місце ліній.

Наприклад, площини α1, α2, паралельні площині β і віддалені від неї на відстань *a*, є:

- геометричне місце точок простору, віддалених від площини β на відстань *a*;

- геометричне місце прямих простору, паралельних площині β і віддалених від неї на відстань *a*;

*-* геометричне місце кривих, які лежать у площині, паралельній даній площині і віддаленій від неї на відстань *a*;

*-* геометричне місце фігур, які лежать у площині, паралельній даній площині і віддаленій від неї на відстань *а.*

Циліндрична поверхня, утворена обертанням прямої навколо паралельної їй прямої АВ і віддаленої від неї на відстань *a,* є:

- геометричне місце точок простору, віддалених на відстань *a* від даної прямої АВ;

- геометричне місце прямих простору, паралельних даній прямій АВ і віддалених від неї на відстань *a*;

- геометричне місце кіл радіуса *a*, центри яких лежать на даній прямій АВ, а їх площини перпендикулярні до АВ;

- геометричне місце рівних еліпсів, центри яких знаходяться на прямій АВ, а їх площини утворюють з прямою АВ один і той же кут α.

Геометричні місця у просторі надзвичайно різноманітні. Деякі з них є природним узагальненням геометричних місць на площині, є ніби їх стереометричними аналогами (наприклад, сфера є стереометричний аналог кола, площина - аналог прямої тощо).

При переході до вивчення просторових геометричних місць точок доцільно пригадати основні геометричні місця точок на площині. Причому отримані результати зручно подати у вигляді таблиці.

|  |  |
| --- | --- |
| Геометричні місця точок | |
| На площині | У просторі |

| 1 | 2 |
| --- | --- |
| 1. Геометричне місце точок, кожна з яких віддалена від даної точки О на відстань, рівну *a*, є коло радіуса *a* з центром у точці О.  2. Геометричне місце точок, відстань яких від даної точки О не перевищує довжини *a* даного відрізка, є круг з центром у точці О радіуса *a*.  3. Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від двох даних точок А і В, є пряма *l*, яка проходить через середину С відрізка АВ перпендикулярно до нього.  4. Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від трьох неколінеарних точок А, В, С, є точка О – центр кола, описаного навколо трикутника АВС.  5. Геометричне місце точок, віддалених від даної прямої *l* на відстань *a*, є дві прямі *m* i *n*, паралельні прямій *l* і віддалені від неї на відстань *a*.  6. Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних прямих *a*, *b*, є пряма *c* – вісь симетрії цих прямих, якщо *a*||*b*, або дві взаємно перпендикулярні прямі *m* i *n* – бісектриси вертикальних кутів, утворених при перетині даних прямих, якщо *a* x *b = 0.*  Зауваження.  Поверхня гіперболічного параболоїда може бути описана прямою, яка при своєму русі перетинає дві мимобіжні прямі *a*, *b* і залишається весь час паралельною до  - площини їх паралелелізму.  7. Геометричне місце точок, рівновіддалених від трьох прямих *a,b,c*, є: точка *0*, якщо *a* x *b* x *с = 0* ; дві точки M,N, якщо *a*||*b, с* перетинає їх (M,N – точки перетину бісектрис кутів, утворених непаралельними прямими); чотири точки K,L,M,N – центри вписаного і зовні вписаних кіл трикутника АВС (А = *b* x *c,* B = *a* x *c,* C = *a* x *b*)*,* або ∅, якщо прямі *a,b,с* паралельні. | 1. Геометричне місце точок, кожна з яких віддалена від даної точки О на відстань, рівну *a*, є сфера радіуса *a* з центром у точці О.  2. Геометричне місце точок, відстань яких від даної точки О не перевищує довжини *a* даного відрізка, є куля з центром у точці О радіуса *a.*  3. Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від двох даних точок А і В, є площина , яка проходить через середину С відрізка АВ перпендикулярно до нього.  4. Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від трьох неколінеарних точок А, В, С, є пряма, яка проходить через точку О – центр кола, описаного навколо трикутника АВС, перпендикулярно до площини  трикутника АВС.  5. Геометричне місце точок, віддалених від даної прямої *l* на відстань *a*, є кругова циліндрична поверхня радіуса *a* з віссю симетрії *l*.  6. Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних прямих *a*, *b*, є площина **, якщо *a*||*b*, або дві взаємно перпендикулярні щини **, **, які проходять через бісектриси вертикальних кутів, утворених прямими *a* і *b*, якщо *a* x *b = 0*, або гіперболічний параболоїд, якщо *a* і *b* мимобіжні.  7. Геометричне місце точок, рівновіддалених від трьох прямих *a,b,c*, які лежать в одній площині  є: пряма *m,* яка проходить через точку *0 = a* x *b* x *с* і перпендикулярна до площини  дві прямі *m,n*, які перпендикулярні до площини і проходять черезточки M,N перетину бісектрис кутів, утворених непаралельними прямими; якщо *a*||*b, с* перетинає їх; чотири прямі *k,l,m,n,* перпендикулярні до площини в точках K,L,M,N – центрах вписаного і зовні вписаних кіл трикутника АВС (А = *b* x *c,* B = *a* x *c,* C = *a* x *b*)*,* або ∅, якщо прямі *a,b,с* паралельні. |

Зауваження. Якщо три прямі не лежать в одній площині, то можливі випадки, які на площині не мають аналогів.

а) Прямі перетинаються в одній точці і не лежать в одній площині.

Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від трьох прямих *a*, *b*, *c*, що перетинаються в одній точці і не належать одній площині, є чотири прямі, які проходять через цю точку.

Для побудови цих прямих розглянемо геометричне місце точок, рівновіддалених від прямих *a*, *b*. Це будуть дві цілком визначені площини , β (г.м.т. 6). Аналогічно геометричне місце точок, рівновіддалених від прямих *b*, *c*, будуть площини γ, δ (г.м.т. 6); від прямих *a*, *c* – площини  і  (г.м.т.6). Площини α, β перетинаються з площинами γ, δ,  і  по чотирьом прямим *k*, *l*, *m* i *n*, які проходять через точку перетину трьох даних прямих *a*, *b*, *c*. Ці чотири прямі є геометричним місцем точок, рівновіддалених від прямих *а,* *b*, *c*,які перетинаються в одній точці і не лежать в одній площині.

б) Прямі *a*, *b*, *c* паралельні між собою і не лежать в одній площині.

Геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від трьох паралельних прямих, які не лежать в одній площині, є пряма *m*, паралельна до даних.

Ця пряма спільна для трьох площин, які будуються як г.м.т.6 для пар прямих: *a*, *c*; *b*, *c*; *a*, *b*. Зрозуміло, для одержання прямої *m* нема необхідності будувати три площини, достатньо побудувати дві з них.

Природньо розглянути у просторі геометричні місця точок, віддалених на відстань *a* від даної площини, рівновіддалених від двох, від трьох даних площин.

8. Геометричне місце точок, кожна з яких віддалена від даної площини α на відстань *a*, є дві площини γ і β, паралельні до α і віддалені від неї на відстань *a*.

Існують інші розташування прямих у просторі: дві прямі перетинаються, а третя мимобіжна до них; дві прямі паралельні, третя мимобіжна до них; всі три прямі попарно мимобіжні. В цих ипадках ГМТ, рівновіддалених від трьох прямих є перетином гіперболічних параболоїдів, утворених парами мимобіжних прямих.

9. Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних площин α і β, є площина ζ, якщо дані площини паралельні, або дві площини γ, δ, якщо дані площини перетинаються, причому:

- ζ – площина, паралельна до площин α та β і ділить відстань між ними

навпіл.

- γ, δ – перпендикулярні між собою бісекторні площини двогранних кутів, утворених площинами α та β.

10. Геометричне місце точок, рівновіддалених від трьох площин, є: пряма, або дві прямі, або чотири паралельні прямі, або чотири прямі, що перетинаються, або ∅:

* одна пряма буде у випадку, коли три площини α, β, γ мають спільну пряму *a*. Шуканим геометричним місцем точок є пряма *a*;
* якщо дві площини α, β паралельні, а третя γ їх перетинає, то шукане геометричне місце точок, рівновіддалених від цих площин, є дві прямі *a* і *b,* паралельні до них, які утворюються у перетині бісекторних площин двогранних кутів, утворених парами площин: ; ,  і належать площині рівновіддаленій від площин  і ;

- якщо площини α, β, γ попарно перетинаються по паралельним прямим, то геометричне місце точок рівновіддалених від цих площин, є чотири прямі *a*, *b*, *c*, *d,* паралельні до ліній їх перетину (мал. 7), які є перетином бісекторних площин двогранних кутів, утворених парами площин: ; ;, ;

- у випадку, коли площини α, β, γ перетинаються в одній точці, шуканим геометричним місцем будуть чотири прямі, що проходять через точку перетину даних площин і належать бісекторним площинам двогранних кутів, утворених попарно даними площинами;

- порожня множина буде у випадку, коли площини α, β, γ паралельні між собою.

Розглянемо порівняння кривих другого порядку і деяких поверхонь обертання як геометричних місць точок, що мають одну і ту ж властивість на площині і в просторі.

|  |  |
| --- | --- |
| На площині | У просторі |

| 1 | 2 |
| --- | --- |
| 11. Геометричне місце точок, з яких даний відрізок АВ видно під прямим кутом, є коло з діаметром АВ без точок А, В.  12. Геометричне місце точок, з яких даний відрізок АВ видно під кутом α, є два сегменти, що містять даний кут α і спираються на даний відрізок АВ без точок А, В. 13. Геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума відстаней від двох даних точок F1 і F2 цієї ж площини є величина стала, більша відстані між F1 і F2,називається еліпсом.14. Геометричне місце точок площини, для кожної з яких абсолютна величина різниці відстаней від двох даних точок F1 і F2 цієї ж площини є величина стала, менша відстані між F1 і F2,називається гіперболою.15. Геометричне місце точок площини, для кожної з яких відстань до даної точки F дорівнює відстані до даної прямої *d*, яка не проходить через точку F, називається параболою.16. Геометричне місце точок площини, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок А та В цієї ж площини є величина стала і дорівнює квадрату довжини *m* даного відрізка, є перпендикуляр до відрізка АВ в точці D, віддалений від середини О відрізка АВ = *a* на відстань .17. Геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума квадратів відстаней від двох даних точок А та В цієї ж площини є величина стала і дорівнює квадрату довжини *m* даного відрізка, є коло з центром в точці О (середина відрізка АВ = *a*) ірадіусом *r* = . | 11. Геометричне місце точок, з яких даний відрізок АВ видно під прямим кутом, є сфера з діаметром АВ без точок А, В.  12. Геометричне місце точок, з яких даний відрізок АВ видно під кутом α, є торова поверхня, одержана від обертання сегмента, що містить даний кут α і спирається на даний відрізок АВ, навколо прямої АВ без точок А, В. 13. Геометричне місце точок простору, для кожної з яких сума відстаней від двох даних точок F1 і F2 простору є величина стала, більша відстані між F1 і F2, називається еліпсоїдом обертання.14. Геометричне місце точок простору, для кожної з яких абсолютна величина різниці відстаней від двох даних точок F1 і F2 простору є величина стала, менша відстані між F1 і F2, називається двопорожнинним гіперболоїдом обертання.15. Геометричне місце точок простору, для кожної з яких відстань до даної точки F дорівнює відстані до даної площини α, яка не проходить через точку F, називається параболоїдом обертання.16. Геометричне місце точок простору, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок А та В простору є величина стала і дорівнює квадрату довжини *m* даного відрізка, є площина, перпендикулярна до відрізка АВ в точці D, віддаленій від середини О відрізка АВ = *a* на відстань .17. Геометричне місце точок простору, для кожної з яких сума квадратів відстаней від двох даних точок А та В простору є величина стала і дорівнює квадрату довжини *m* даного відрізка, є сфера з центром в точці О (середина відрізка АВ = *a*) ірадіусом *r* = . |

Слід відмітити, що між формою геометричного місця точок на площині і в просторі у більшості випадків існує зв’язок, наведений у таблиці.

|  |  |
| --- | --- |
| На площині | У просторі |
| Точка  Пряма  Дві паралельні прямі  Коло | Пряма  Площина Циліндрична поверхня Сфера |

Нехай, наприклад, потрібно знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від прямих, що містять сторони трикутника. На площині таких точок чотири (центри вписаного і зовні вписаних кіл).

Таблиця показує, що в просторі шукане геометричне місце точок є чотири прямі, причому ці прямі проходять через названі центри перпендикулярно до площини трикутника.

Зрозуміло, що встановивши форму геометричного місця точок на площині, за допомогою таблиці можна “прикинути”, яку форму має це геометричне місце точок у просторі. Потім обгрунтувати результати і одночасно уточнити розташування шуканого геометричного місця точок відносно даних точок і ліній.

Але не слід думати, що зроблена на основі таблиці прикидка завжди вірна. Таблиця не встановлює взаємно однозначної відповідності між формою геометричного місця на площині і в просторі, бо такої відповідності, взагалі кажучи, не існує. Є такі геометричні місця точок, які не змінюють форму в залежності від того, розглядаємо ми їх на площині чи в просторі. Наприклад, геометричне місце точок, сума відстаней яких від двох даних паралельних прямих мінімальна. У будь-якому випадку умові відповідають всі точки смуги площини, обмеженої даними прямими.

Порівнюючи геометричні місця точок, що відповідають певній умові, на площині і в просторі, бачимо, що між ними є схожість, але є й багато суттєвих відмінностей.

Геометричні місця точок у просторі можуть мати одну, дві чи більше властивостей. Якщо геометричне місце точок визначається однією умовою, що виражається рівністю, то воно є деяка поверхня, а коли ця умова виражається нерівністю, то маємо геометричне тіло.

Якщо геометричне місце визначається двома (трьома) рівностями, то воно складається з точок ліній, які є спільними для двох (трьох) поверхонь.

Іноді геометричне місце може містити в собі всі точки простору. Таким є, наприклад, геометричне місце прямих, кожна з яких рівновіддалена від двох даних точок А та В. Будь-яка пряма, паралельна АВ, або та, що проходить через середину відрізка АВ, рівновіддалена від точок А та В. Множина таких прямих заповнює весь простір.

Ми розглядатимемо геометричні місця точок, які визначаються рівностями, тобто вони будуть певними поверхнями.

**Порівняльна характеристика геометричних місць точок на площині і в просторі в аналітичному вигляді**

Виберемо прямокутну декартову систему координат на площині (0, *i*, *j*) і в просторі (0, *i*, *j*, *k*) і розглянемо порівняльну характеристику геометричних місць точок на площині і в просторі в аналітичному вигляді.

|  |  |
| --- | --- |
| 18. Геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють будь-яке рівняння 1-го степеня відносно *х*, *у*, є пряма. | 18. Геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють будь-яке рівняння 1-го степеня відносно *х*, *у*, *z*, є площина. |

Наведемо з аналітичної геометрії приклади аналогічних рівнянь прямої в (0, *i*, *j*) і площини в (0, *i*, *j*, *k*).

|  |  |
| --- | --- |
| 1). Рівняння прямої, заданої точкою М0 і вектором нормалі *n*  *a*(*x* − *x*0) + *b*(*y* – *y*0) = 0,  де M0(*x*0; *y*0) *l*, *n*(*a*; *b*)  *l*.  2). Загальне рівняння прямої  *aх* + *bу* +*c* = 0,  де *n*(*a*; *b*) – вектор нормалі прямої.  3). Рівняння прямої “у відрізках на осях”:  +  = 1, де А(*а*;0), В(0;*b*) − точки перетину прямої з осями координат.  4). Нормальне рівняння прямої  *x* *c*osα + *y* si*n*α − *p* = 0,  де *р* – відстань від початку координат до прямої,  *n*0(*c*osα, sі*n*α) – одиничний вектор нормалі прямої.  19. Геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють рівняння  + =1, є еліпс.  20. Геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють рівняння −=1, є гіпербола.  21. Геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють рівняння −=−1, є гіпербола.  22. Геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють рівняння *у*2 = 2*рх*, є парабола. | 1). Рівняння площини, заданої точкою М0 і вектором нормалі *n*  *a*(*x* − *x*0) + *b*(*y* – *y*0) + *c* (*z* – *z*0) = 0,  де M0(*x*0; *y*0; *z*0) , *n*(*a*; *b*, *c*)  .  2). Загальне рівняння площини  *aх* + *bу* +*сz* + *d* = 0,  де *n*(*a*;*b*;*c*) – вектор нормалі площини.  3). Рівняння площини “у відрізках на осях”:  +  +  = 1, де А(*а*;0;0), В(0;*b*;0), С(0;0;*с*) − точки перетину площини з осями координат.  4). Нормальне рівняння площини  *x c*os + *y* cosβ + *z* *c*osγ − *p* = 0,  де *р* – відстань від початку координат до площини,  *n*0(*c*osα, *c*osβ, *c*osγ) – одиничний вектор нормалі площини.  19. Геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють рівняння++=1, є еліпсоїд.  20. Геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють рівняння −+=−1, є двопорожнинний гіперболоїд.  21. Геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють рівняння −+=1, є однопорожнинний гіперболоїд.  22. Геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють рівняння +  = 2*ру*, є еліптичний параболоїд. |

Цікавим є порівняння геометричних фігур на площині і в просторі, рівняння яких у системах координат (0, *i*, *j*), (0, *i*, *j*, *k*) автентичні.

|  |  |
| --- | --- |
| На площині | У просторі |

| 1 | 2 |
| --- | --- |
| 23. А*х* + В*у* + С = 0. Рівняння прямої загального положення, паралельної вектору *a*(−В; А).  24.  +  = 1. Рівняння еліпса.  25. *х*2 + *у*2 = *r*2. Рівняння кола радіуса *r* з центром у точці О(0; 0).  26. *х*2 + *у*2 = 0.  Рівняння задовольняють координати точки О(0; 0).  27. −  = 1. Рівняння гіперболи.  28. *х*2 − *у*2 = 0, або:  (*х* – *у*)(*х* + *у*) = 0, або:    Рівняння двох прямих, що перетинаються в точці О(0;0). Бісектриси координатних кутів І і IІІ, ІІ і ІV.  29. *у*2 = 2*рх*. Рівняння параболи.  30. *у*2 – *a2* = 0, або  (*у* – *a*)(*у* + *a*) = 0, або:    Рівняння двох прямих, паралельних координатній осі *x*. | 23. А*х* + В*у* + С = 0. Рівняння площини, паралельної осі *z*.  24.  +  = 1. Рівняння еліптичного циліндра з твірною, паралельною до осі *z*, напрямною якого є еліпс:  25. *х*2 + *у*2 = *r*2. Рівняння колового циліндра з твірною, паралельною осі *z*, напрямною якого є коло:  26. *х*2 + *у*2 = 0. Рівняння осі *z*.  27.  −  = 1. Рівняння гіперболічного циліндра з твірною, паралельною осі *z*, напрямною якого є гіпербола:  28. *х*2 − *у*2 = 0, або:    Рівняння двох площин, що перетинаються по осі *z*. Бісекторні площини двогранних кутів, утворених координатними площинами (*xz*) і (*yz*).  29. *у*2 = 2*рх*. Рівняння параболічного циліндра з твірною, паралельною осі *z*, напрямною якого є парабола:    30. *у*2 – *a*2 = 0, або:    Рівняння двох площин, паралельних координатній площині (*xz*). |

**Порівняльна характеристика задач на знаходження геометричних**

**місць на площині і в просторі**

|  |  |
| --- | --- |
| На площині | У просторі |

| 1 | 2 |
| --- | --- |
| 1. Знайти геометричне місце середин відрізків, що сполучають дану точку А з точками даної  прямої *l*.  Таким ГМТ є пряма, паралельна даній і віддалена від неї на відстані ρ(A, *l*).  2. Знайти геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої в даній точці.  Таким ГМТ є пряма, перпендикулярна до даної прямої в даній точці.  3. Знайти геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даного кола в даній точці.  Таким ГМТ є пряма, яка проходить через центр даного кола і дану точку.  4. Знайти геометричне місце центрів кіл радіуса *R*, що дотикаються до даної прямої.  Таким ГМТ є дві прямі, паралельні даній і віддалені від неї на відстань *R*.  5. Знайти геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до двох даних паралельних прямих.  Таким ГМТ є вісь симетрії даних прямих.  6. Знайти геометричне місце центрів кіл, які проходять через дані точки А і В.  Таким ГМТ є серединний перпендикуляр відрізка АВ.  7. Знайти геометричне місце вершин трикутників, рівновеликих даному трикутнику АВС, які мають з ним спільну основу АВ.  Таким ГМТ є дві прямі, паралельні основі АВ і віддалені від неї на відстань *h*c, що дорівнює довжині висоти трикутника АВС.  8. Знайти геометричне місце центрів кіл радіуса *R*, що проходять через точку О.  Таким ГМТ є коло з центром О радіуса *R*.  9. Дано дві різні точки А і В. Знайти геометричне місце основ перпендикулярів, опущених з точки А на прямі, проведені через точку В.  Таким ГМТ є коло, діаметром якого є відрізок АВ.  10. Дано дві різні точки А і В. Знайти геометричне місце точок, кожна з яких симетрична з точкою А відносно деякої прямої, яка проходить через точку В.  Таким ГМТ є коло з центром у точці В радіуса АВ.  11. Знайти геометричне місце середин хорд кола з центром О, проведених через точку А, розташовану всередині кола.  Таким ГМТ є коло, діаметром якого є відрізок ОА.  12. Знайти геометричне місце середин хорд даного кола, паралельних даній прямій АВ.  Таким ГМТ є діаметр кола (без його кінців), перпендикулярний до прямої АВ.  13. Дано коло радіуса *r*. Знайти геометричне місце точок, симетричних до його центру відносно кожної точки цього кола.  Таким ГМТ є коло радіуса 2*r,* концентричне з даним.  14. Знайти геометричне місце точок, відстань яких до даного кола радіуса *r* дорівнює *a*.  Таким ГМТ є коло радіуса *r*1 = *r* + *a*, концентричне з даним.  15. Знайти геометричне місце середин рівних хорд даної довжини *a*, проведених в даному колі радіуса  *r* (*a* < 2*r*).  Таким ГМТ є коло радіуса *r*1 = , концентричне з даним.  16. Знайти геометричне місце центрів кіл радіуса *r*, що дотикаються до кола з центром О радіуса *R* (*r* < *R*).  Таким ГМТ є два концентричні з даним кола радіусів *r*1 =*R* + *r*, *r*2 =*R*–*r*.  17. Знайти геометричне місце точок таких, щоб відрізок дотичної, проведеної з цих точок до даного кола з центром О радіуса *r*, мав довжину *a*.  Таким ГМТ є коло радіуса *r*1 = ,концентричне з даним.  18. На колі радіуса *r* взято точку О, навколо якої обертається пряма, що перетинає коло у змінній точці В. На цій прямій по обидва боки від точки В відкладаються відрізки ВМ1 = ВМ2 = АВ, де А – другий кінець діаметра, який проходить через точку О.Знайти траєкторію точок М1 і М2 при обертанні прямої ОВ.  Таким ГМТ є два кола радіуса *r*, які перетинаються у точцах A і О. Центри їх розміщені у діаметрально протилежних точках даного кола, симетричних відносно прямої ОА.  19. Дано точки А, В. Два кола дотикаються до прямої АВ, одне – в точці А, друге – в точці В і дотикаються одне до одного в точці М. Знайти геометричне місце точок М.  Якщо через М провести спільну дотичну до цих кіл, то вона перетне АВ у точці С, причому СА = СВ = СМ. Отже, трикутник АМВ – прямокутний з гіпотенузою АВ, тобто геометричним місцем точок М є коло діаметра АВ без точок А та В.  20. Знайти геометричне місце центрів кіл, які проходять через дану точку А і дотикаються до даної прямої *l*.  Таким ГМТ є парабола з фокусом А і директрисою *l*.  21. Дано дві точки А та В. Знайти геометричне місце точок М, для яких трикутник АМВ прямокутний.  Трикутник прямокутний, тоді виконується одна з умов: АМВ = 900, МАВ = 900, МВА = 900. Звідси слідує, що шуканим ГМТ є об'єднання трьох фігур (без точок А та В):  - коло з діаметром АВ,  - пряма *l*A, яка проходить через точку А перпендикулярно до АВ;  - пряма *l*B, яка проходить через точку В перпендикулярно до АВ.  22. Дано трикутник АВС. Знайти геометричне місце точок М, для яких площа кожного з трикутників АВМ, АСМ, ВСМ менша площі трикутника АВС.  Таким ГМТ є внутрішня область трикутника АВС. | Знайти геометричне місце середин відрізків, що сполучають дану точку А з точками даної площини α.  Таким ГМТ є площина, паралельна даній і віддалена від неї на відстані ρ(A, α).  2. Знайти геометричне місце центрів сфер, які дотикаються до даної площини в даній точці.  Таким ГМТ є пряма, перпендикулярна до даної площини в даній точці.  3. Знайти геометричне місце центрів сфер, які дотикаються до даної сфери в даній точці.  Таким ГМТ є пряма, яка проходить через центр даної сфери і дану точку.  4. Знайти геометричне місце центрів сфер радіуса *R*, що дотикаються до даної площини.  Таким ГМТ є дві площини, паралельні даній і віддалені від неї на відстань *R*.  4'. Знайти геометричне місце центрів сфер (кіл) радіуса *R*, що дотикаються до даної прямої.  Таким ГМТ є циліндрична поверхня радіуса *R*, віссю якої є дана пряма.  5. Знайти геометричне місце центрів сфер, які дотикаються до двох даних паралельних площин.  Таким ГМТ є площина симетрії даних площин.  6. Знайти геометричне місце центрів сфер (або кіл), які проходять через дані точки А і В.  Таким ГМТ є площина симетрії точок А і В.  7. Знайти геометричне місце вершин тетраедрів, рівновеликих даному тетраедру ДАВС, які мають з ним спільну основу АВС.  Таким ГМТ є дві площини, паралельні площині АВС і віддалені від неї на відстань *h*d, що дорівнює довжині висоти тетраедра DАВС.  8. Знайти геометричне місце центрів кіл (сфер) радіуса *R*, що проходять через точку О.  Таким ГМТ є сфера з центром О радіуса *R*.  9. Дано дві різні точки А і В. Знайти геометричне місце основ перпендикулярів, опущених з точки А на прямі, проведені через точку В.  Таким ГМТ є сфера, діаметром якої є відрізок АВ.  10. Дано дві різні точки А і В. Знайти геометричне місце точок, кожна з яких симетрична з точкою А відносно деякої прямої, яка проходить через точку В.  Таким ГМТ є сфера з центром у точці В радіуса АВ.  11. Знайти геометричне місце середин хорд сфери з центром О, проведених через точку А, розташовану всередині сфери.  Таким ГМТ є сфера, діаметром якої є відрізок ОА.  12. Знайти геометричне місце середин хорд даної сфери, паралельних даній прямій АВ.  Таким ГМТ є точки, розташовані всередині великого круга, площина якого перпендикулярна до прямої АВ.  13. Дано сферу радіуса *R*. Знайти геометричне місце точок, симетричних її центу відносно кожної точки цієї сфери.  Таким ГМТ є сфера радіуса 2*R,* концентрична з даною.  14. Знайти геометричне місце точок, відстань яких до даної сфери радіуса *R* дорівнює *a*.  Таким ГМТ є сфера радіуса *R*1 = *R* + *a,* концентрична з даною.  15. Знайти геометричне місце середин рівних хорд даної довжини *a*, проведених в даній сфері радіуса  *r* (*a* < 2*r*).  Таким ГМТ є сфера радіуса *r*1 = , концентрична з даною.  16. Знайти геометричне місце центрів сфер радіуса *r*, що дотикаються до сфери з центром О радіуса *R* (*r* < *R*).  Таким ГМТ є дві концентричні з даною сфери радіусів *r*1=*R*+*r*, *r*2=*R*−*r*.  17. Знайти геометричне місце точок таких, щоб відрізок дотичної, проведеної з цих точок до даної сфери з центром О радіуса *r*, мав довжину *a*.  Таким ГМТ є сфера радіуса *r*1 = , концентрична з даною.  18. На сфері радіуса *r* взято точку О, навколо якої обертається пряма, що перетинає сферу у змінній точці В. На цій прямій по обидва боки від точки В відкладаються відрізки ВМ1 = ВМ2 = АВ, де А – другий кінець діаметра, який проходить через точку О. Знайти траєкторію точок М1 і М2 при обертанні прямої ОВ.  Таким ГМТ є поверхня тора, що описується одним із кіл радіуса *r* і центрами, розміщені у діаметрально протилежних точках сфери, симетричних відносно прямої ОА, навколо прямої ОА .  19. Дано точки А, В. Два кола, розташовані в одній площині з АВ, дотикаються до прямої АВ, одне – в точці А, друге – в точці В і дотикаються одне до одного в точці М. Знайти геометричне місце точок М.  Таким ГМТ є сфера, побудована на діаметрі АВ без точок А та В.  20. Знайти геометричне місце центрів сфер, які проходять через дану точку А і дотикаються до даної площини α.  Таким ГМТ є параболоїд обертання з фокусом А і директоріальною площиною α.  21. Дано дві точки А та В. Знайти геометричне місце точок М, для яких трикутник АМВ прямокутний.  Таким ГМТ є об'єднання трьох фігур (без точок А та В):  - сфера з діаметром АВ,  - площина αA, яка проходить через точку А перпендикулярно до АВ;  - площина αB, яка проходить через точку В перпендикулярно до АВ.  22. Дано тетраедр DАВС. Знайти геометричне місце точок М таких, що об’єм кожного з тетраедрів МАВС, МАСD, МАВD, МВСD менший об’єму тетраедра DАВС.  Таким ГМТ є внутрішня область тетраедра DАВС. |