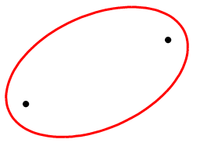
# Еліпс

*.*

[](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Ellips.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Ellips.png)

Еліпс із фокусами

**Еліпс** в [геометрії](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F) — [лінія другого порядку](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D1%97_%D0%B4%D1%80%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D1%83).

Термін походить від [грец.](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B5%D1%86%D1%8C%D0%BA%D0%B0_%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0) *ἔλλειψις* — *нестача*, *пропуск*, *випадіння* (мається на увазі «неповнота» або «дефектність» еліпсу порівняно з «повним» колом або кругом).

## Аналітичне визначення

[](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Ellipse1.png)

Еліпсом називають лінію, яка в деякій [декартовій прямокутній системі координат](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) задається рівнянням:

\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1

Еліпс належить до [кривих другого порядку](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0_%D0%B4%D1%80%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D1%83).

## Визначальна властивість еліпса

Точки \left. F_1 \right.і \left. F_2 \right.називають [фокусами](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D0%BA%D1%83%D1%81_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) еліпса, а відстань між ними — фокусною відстанню, її позначають через \boldsymbol{2c}, отже, \left| F_1 F_2 \right| = 2c. Суму відстаней від будь-якої точки \left. M \right.еліпса до фокусів \left. F_1 \right.і \left. F_2 \right.позначимо \boldsymbol{2a}. Тоді за означенням маємо: \left. 2a > 2c,\;a>c \right.. Звідси можна сказати, що еліпс складається з таких і тільки таких точок \left. M \right., які задовольняють умові: \left| F_1 M \right| + \left| F_2 M \right| = 2a

## Геометричне визначення

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок \left. F_1 \right.і \left. F_2 \right.цієї площини є величина стала, більша за відстань між \left. F_1 \right.і \left. F_2 \right..

## Елементи еліпса

### Вершини еліпса

Точки A,\;A_1,\;B,\;B_1перетину еліпсу з осями прямокутної системи координат, вибраної так щоб початок координат був серединою відрізка \left| F_1 F_2 \right|, а вісь \left. Ox \right.збігалася з прямою \left( F_1 F_2 \right), називають вершинами еліпсу.

### Осі еліпса

Відрізок \left| A A_1 \right| = 2a, що проходить через обидва фокуси \left. F_1 \right.і \left. F_2 \right., називають великою віссю еліпса, а перпендикулярний йому відрізок \left| B B_1 \right| = 2b, що перетинається з великою віссю в центрі еліпса \left. O \right.– відповідно його малою віссю. Довжина цих відрізків відповідає умові \left. a^2 - b^2 = c^2 \right.. Еліпс симетричний відносно своїх осей та центру.

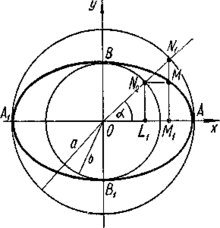
### Директриса та ексцентриситет

Число e = {c \over a}це [ексцентриситет](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BA%D1%81%D1%86%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%82) еліпса, величина, що характеризує його витягнутість; для еліпсу \boldsymbol{e} < 1. Прямі, рівняння яких x = - {a \over e}\quad \mbox{i} \quad x = {a \over e}називаються [директрисами](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%80%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%B0) еліпса; співвідношення відстані від будь-якої точки еліпса до найближчого фокусу до відстані до найближчої директриси стале і дорівнює ексцентриситету.

Зауважимо, що величинами, які характеризують еліпс, є велика і мала півосі \boldsymbol{a}і \boldsymbol{b}, відстань \boldsymbol{c}фокуса від центру, ексцентриситет \boldsymbol{e}. Залежність між ними виражається формулами: a^2 = b^2 + c^2,\;e = {c \over a}. Тому, щоб скласти рівняння еліпса, досить знати або півосі \left. a \right.і \left. b \right., або одну піввісь і ексцентриситет і т.д.

Якщо точки \left. F_1 \right.і \left. F_2 \right.збігаються, то еліпс стає колом радіуса \left. a \right.. При цьому \left.a = b,\;e = 0\right.. Отже, [коло](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BE) є окремим випадком еліпса.

## Різні види рівнянь еліпса

[](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Ellipse2.png)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.5/common/images/magnify-clip.png](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Ellipse2.png)

Еліпс в [полярній системі координат](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82).

### Канонічне рівняння еліпса

\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1

### [Параметричне рівняння](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D0%BD%D1%8F) еліпса

\left\{\begin{matrix} x = a \cos \alpha \\ y = b \sin \alpha \end{matrix}\right.

### Нормальне рівняння еліпса

\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1

## Довжина дуги еліпса

Довжина дуги еліпса обчислюється за формулою:



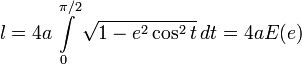
Використавши параметричний запис еліпса отримуємо наступний вираз:

l = \int \limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt.

Після заміни b^2 = a^2 \left(1 - e^2 \right)вираз довжини дуги приймає остаточний вигляд:

l = a \int \limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\,dt,\;\;\; e < 1.

Отриманий інтеграл належить до родини [еліптичних інтегралів](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BB%D1%96%D0%BF%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D1%96%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB), які не виражаються у елементарних функціях, і зводиться до еліптичного інтегралу другого роду E \left(t,e \right). Зокрема, периметр еліпса дорівнює:

,

де E \left(e \right)— повний еліптичний інтеграл Лежандра другого роду.

### Наближені формули периметра

YNOT: L=4 \cdot \left(a^x+b^x\right)^\left(1/x\right), де x=\frac{ln2}{ln(\frac{\pi}{2})}Максимальна похибка цією формули становить близька 0,3619% при ексцентриситеті еліпса 0,979811 (відношення осей ~1/5). Похибка завжди додатна.

Дуже наближена формула: L = \pi \cdot  \left( a + b \right)

## Дотична

Рівняння [дотичної](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0) до еліпса через точку \left. M_0 \right., яка належить еліпсу

\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1