# Еліпс

*.*





Еліпс із фокусами

**Еліпс** в [геометрії](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F) — [лінія другого порядку](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D1%97_%D0%B4%D1%80%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D1%83).

Термін походить від [грец.](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B5%D1%86%D1%8C%D0%BA%D0%B0_%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0) *ἔλλειψις* — *нестача*, *пропуск*, *випадіння* (мається на увазі «неповнота» або «дефектність» еліпсу порівняно з «повним» колом або кругом).

## Аналітичне визначення



Еліпсом називають лінію, яка в деякій [декартовій прямокутній системі координат](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82) задається рівнянням:



Еліпс належить до [кривих другого порядку](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0_%D0%B4%D1%80%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D1%83).

## Визначальна властивість еліпса

Точки і називають [фокусами](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D0%BA%D1%83%D1%81_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) еліпса, а відстань між ними — фокусною відстанню, її позначають через , отже, . Суму відстаней від будь-якої точки еліпса до фокусів і позначимо . Тоді за означенням маємо: . Звідси можна сказати, що еліпс складається з таких і тільки таких точок , які задовольняють умові: 

## Геометричне визначення

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок і цієї площини є величина стала, більша за відстань між і .

## Елементи еліпса

### Вершини еліпса

Точки перетину еліпсу з осями прямокутної системи координат, вибраної так щоб початок координат був серединою відрізка , а вісь збігалася з прямою , називають вершинами еліпсу.

### Осі еліпса

Відрізок , що проходить через обидва фокуси і , називають великою віссю еліпса, а перпендикулярний йому відрізок , що перетинається з великою віссю в центрі еліпса – відповідно його малою віссю. Довжина цих відрізків відповідає умові . Еліпс симетричний відносно своїх осей та центру.

### Директриса та ексцентриситет

Число це [ексцентриситет](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BA%D1%81%D1%86%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%82) еліпса, величина, що характеризує його витягнутість; для еліпсу . Прямі, рівняння яких називаються [директрисами](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%80%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%B0) еліпса; співвідношення відстані від будь-якої точки еліпса до найближчого фокусу до відстані до найближчої директриси стале і дорівнює ексцентриситету.

Зауважимо, що величинами, які характеризують еліпс, є велика і мала півосі і , відстань фокуса від центру, ексцентриситет . Залежність між ними виражається формулами: . Тому, щоб скласти рівняння еліпса, досить знати або півосі і , або одну піввісь і ексцентриситет і т.д.

Якщо точки і збігаються, то еліпс стає колом радіуса . При цьому . Отже, [коло](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BE) є окремим випадком еліпса.

## Різні види рівнянь еліпса





Еліпс в [полярній системі координат](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82).

### Канонічне рівняння еліпса



### [Параметричне рівняння](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D0%BD%D1%8F) еліпса



### Нормальне рівняння еліпса



## Довжина дуги еліпса

Довжина дуги еліпса обчислюється за формулою:



Використавши параметричний запис еліпса отримуємо наступний вираз:



Після заміни вираз довжини дуги приймає остаточний вигляд:



Отриманий інтеграл належить до родини [еліптичних інтегралів](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BB%D1%96%D0%BF%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D1%96%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB), які не виражаються у елементарних функціях, і зводиться до еліптичного інтегралу другого роду . Зокрема, периметр еліпса дорівнює:

,

де — повний еліптичний інтеграл Лежандра другого роду.

### Наближені формули периметра

YNOT: , де Максимальна похибка цією формули становить близька 0,3619% при ексцентриситеті еліпса 0,979811 (відношення осей ~1/5). Похибка завжди додатна.

Дуже наближена формула: 

## Дотична

Рівняння [дотичної](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0) до еліпса через точку , яка належить еліпсу

