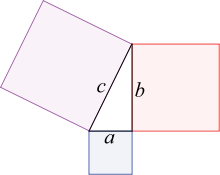
# 1.3 Теорема [Піфагора](file:///G:\електроний%20підручник\Піфагор.mht)

[](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Pythagorean.svg)

Теорема Піфагора: *a*2 + *b*2 = *c*2

Анімаційне доведення теореми Піфагора

**Теоре́ма Піфаго́ра** — одна із **засадничих** теорем [евклідової геометрії](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D1%96%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F), котра встановлює співвідношення між сторонами прямокутного [трикутника](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B8%D0%BA%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA). Вважається, що вона доведена грецьким математиком [Піфагором](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D1%96%D1%84%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%80), на честь котрого вона названа (є й інші версії, зокрема альтернативна думка, що ця теорема у загальному вигляді була сформульована математиком-піфагорійцем [Гіппасом](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/w/index.php?title=%D0%93%D1%96%D0%BF%D0%BF%D0%B0%D1%81&action=edit&redlink=1)).

|  |
| --- |
|  |

## Теорема

Теорема звучить наступним чином:

*В прямокутному трикутнику площа квадрата, побудованого на гіпотенузі дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах.*

Позначивши довжину гіпотенузи трикутника як *c*, а довжини катетів як *a* та *b*, отримаємо наступну формулу:

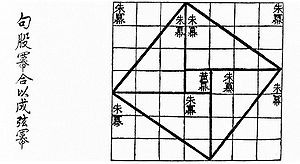
a^2 + b^2 = c^2.\, 

Таким чином, теорема Піфагора встановлює співвідношення, яке дозволяє визначити сторону прямокутного трикутника, знаючи довжини двох інших. Теорема Піфагора є окремим випадком [теореми косинусів](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D1%81%D0%B8%D0%BD%D1%83%D1%81%D1%96%D0%B2), котра визначає співвідношення між сторонами довільного трикутника.

Також доведено зворотнє твердження (називають також зворотньою до теореми Піфагора):

*Для будь-яких трьох додатніх чисел a, b і c, таких що a² + b² = c², існує прямокутний трикутник з катетами a та b і гіпотенузою c.*

## Історія

[](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Chinese_pythagoras.jpg)

Візуальне доведення для трикутника (3, 4, 5) з книги [«Чу Пей»](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/w/index.php?title=%D0%A7%D1%83_%D0%9F%D0%B5%D0%B9&action=edit&redlink=1) 500–200 до н.е.

Історію теореми можна розділити на чотири частини: знання про [Піфагорові числа](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D1%96%D1%84%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2%D1%96_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0), знання про відношення сторін в прямокутному трикутнику, знання про відношення суміжних кутів та доведення теореми.

[Мегалітичні споруди](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9C%D0%B5%D0%B3%D0%B0%D0%BB%D1%96%D1%82%D0%B8) близько 2500 до н.е. в [Єгипті](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%84%D0%B3%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%82) та [Північній Європі](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%96%D1%87%D0%BD%D0%B0_%D0%84%D0%B2%D1%80%D0%BE%D0%BF%D0%B0), містять прямокутні трикутники із сторонами з цілих чисел. [Бартель Леендерт ван дер Варден](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/w/index.php?title=%D0%91%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C_%D0%9B%D0%B5%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%B5%D1%80%D1%82_%D0%B2%D0%B0%D0%BD_%D0%B4%D0%B5%D1%80_%D0%92%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B5%D0%BD&action=edit&redlink=1) висловив гіпотезу, що в ті часи Піфагорові числа були знайдені алгебраїчно.

Написаний між 2000 та 1876 до н.е. [папірус](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D0%B0%D0%BF%D1%96%D1%80%D1%83%D1%81) часів [Середнього Єгипетського царства](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D1%96%D0%B9_%D0%84%D0%B3%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%82) [*Berlin 6619*](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/w/index.php?title=Berlin_6619&action=edit&redlink=1) містить задачу розв’язком якої є [числа Піфагора](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0_%D0%9F%D1%96%D1%84%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B0).

Під час правління [Хамурапі](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%A5%D0%B0%D0%BC%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BF%D1%96) Великого, [вивилонська](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%92%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D0%BD) табличка [*Plimpton 322*](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/Plimpton_322), написана між 1790 і 1750 до н.е містить багато записів тісно пов’язаних з числами Піфагора.

В сутрах [Будхаяни](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/w/index.php?title=%D0%91%D1%83%D0%B4%D1%85%D0%B0%D1%8F%D0%BD%D0%B0&action=edit&redlink=1), які датуються за різними версіями 8-им чи 2-им століттями до н.е. в [Індії](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%86%D0%BD%D0%B4%D1%96%D1%8F), містить Піфагорові числа виведені алгебраїчно, формулювання теореми Піфагора та геометричне доведення для рівнобедренного прямокутного трикутника.

В сутрах [Апастамби](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/w/index.php?title=%D0%90%D0%BF%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BC%D0%B1%D0%B0&action=edit&redlink=1) (близько 600 до н.е.) міститься числове доведення теореми Піфагора з використанням обчислення площі. Ван дер Варден вважає, що воно було засноване на традиціях попередників. Згідно з Альбертом Бурком, це оригінальне доведення теореми і він припускає, що Піфагор відвідав [Араконам](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/w/index.php?title=%D0%90%D1%80%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BC&action=edit&redlink=1) і скопіював його.

[Піфагор](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D1%96%D1%84%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%80), роки життя якого зазвичай вказують 569 — 475 до н.е. використовує алгебраїчні методи розрахунку Піфагорових чисел, згідно з Прокловими коментарями до Евкліда. [Прокл](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%BA%D0%BB), однак, жив між 410 і 485 роками н.е. Згідно з Томасом Гізом, немає ніяких вказівок на авторство теореми протягом п’яти століть після Піфагора. Однак, коли такі автори як [Плутарх](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D0%BB%D1%83%D1%82%D0%B0%D1%80%D1%85) або [Ціцерон](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%A6%D1%96%D1%86%D0%B5%D1%80%D0%BE%D0%BD) приписують теорему Піфагору, вони роблять це так, наче авторство широко відоме і безсумнівне.

Близько 400 до н. е. згідно Прокла, [Платон](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BD) дав метод розрахунку Піфагорових чисел, що що поєднував алгебру та геометрію. Близько 300 до н.е., в *Началах* [Евкліда](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D1%96%D0%B4) маємо найдавніше аксіоматичне [доведення](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F), яке збереглося до наших днів.

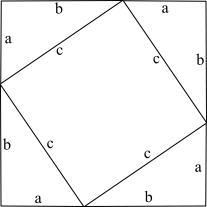
Написані десь між 500 до н.е. і 200 до н.е., китайська математична книга [«Чу Пей»](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/w/index.php?title=%D0%A7%D1%83_%D0%9F%D0%B5%D0%B9&action=edit&redlink=1) (周髀算经), дає візуальне доведення теореми Піфагора, яка в Китаї називається теорема Гугу (勾股定理), для трикутника із сторонами (3, 4, 5). Під час правління [династії Хань](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%96%D1%8F_%D0%A5%D0%B0%D0%BD%D1%8C), з 202 до н.е. до 220 н.е. Числа Піфагора з’являються в книзі [«Дев’ять розділів математичного мистецтва»](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/w/index.php?title=%D0%94%D0%B5%D0%B2%E2%80%99%D1%8F%D1%82%D1%8C_%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%B4%D1%96%D0%BB%D1%96%D0%B2_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BC%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%86%D1%82%D0%B2%D0%B0&action=edit&redlink=1) разом із згадкою про прямокутні трикутники.

Вперша зафіксоване використання теореми в Китаї, де вона відома як теорема Гугу (勾股定理) та в Індії, де вона відома як теорема Баскара.

Багато дискутується чи була теорема Піфагора відкрита один раз чи багато разів. Бойер (1991) вважає, що знання виявлені в Шульба Сутрах можуть бути [месопотамського](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%81%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%B0%D0%BC%D1%96%D1%8F) походження.

## Доведення

### Алгебраїчне доведення

[](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Pythagoralg.png)

Квадрати утворюються з чотрьох прямокутних трикутників.

Відомо понад сто доведень теореми Піфагора. Тут представлено доведення засноване на теоремі існування площі фігури:

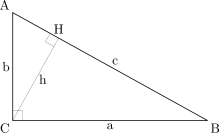
1. Розмістимо чотири однакові прямокутні трикутники так, як це зображено на малюнку.
2. Чотирикутник зі сторонами *c* є квадратом, оскільки сума двох гострих кутів 90^\circ, а розгорнутий кут — 180^\circ.
3. Площа всієї фігури рівна, з одної сторони, площі квадрата зі стороною «a+b», а з іншої — сумі площ чотирьох трикутників і внутрішнього квадрату.

(a+b)^2=4\cdot\frac{ab}{2}+c^2;

a^2+2ab+b^2=2ab+c^2;\frac{}{}

Що і необхідно було довести.

### За подібністю трикутників

[](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Proof-Pythagorean-Theorem.svg)

Використання подібних трикутників.

Нехай *ABC* — прямокутний трикутник, в якому кут *C* прямий, як показано на рисунку. Проведемо [висоту](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%92%D0%B8%D1%81%D0%BE%D1%82%D0%B0_%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%BA%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0) з точки *C*, і назвемо *H* точку перетину з стороною *AB*. Утворений трикутник *ACH* [подібний](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B4%D1%96%D0%B1%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F)) до трикутника *ABC*, оскільки вони обидва прямокутні (за визначенням висоти), і в них спільний кут *A*, очевидно третій кут буде в цих трикутників також однаковий. Аналогічно міркуюючи, трикутник *CBH* також подібний до трикутника *ABC*. З подібності трикутників: Якщо

тоді

 \frac{a}{c}=\frac{HB}{a} \mbox{ and } \frac{b}{c}=\frac{AH}{b}.\,

Це можна записати у вигляді

a^2=c\times HB \mbox{ and }b^2=c\times AH. \,

Якщо додати ці дві рівності, отримаєм

a^2+b^2=c\times HB+c\times AH=c\times(HB+AH)=c^2 .\,\!

Іншими словами, Теорема Піфагора:

a^2+b^2=c^2.\,\!

### Доведення Евкліда

В [Евклідових](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D1%96%D0%B4) «Началах», теорема Піфагора доведена методом [паралелограмів](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC). Нехай *A*, *B*, *C* вершини прямокутного трикутника, з прямим кутом *A*. Опустимо перпендикуляр з точки *A* на сторону протилежну до гіпотенузи в [квадраті](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82) побудованому на гіпотенузі. Лінія ділить квадрат на два [прямокутники](mhtml:file://G:\рівняння\Теорема%20Піфагора%20—%20Вікіпедія.mht!/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%BE%D0%BA%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA), кожен з яких має таку саму площу, що й квадрати побудовані на катетах. Головна ідея при доведенні полягає в тому, що верхні квадрати перетворюються в паралелограми такої самої площі, а тоді повертаються і перетворюються в прямокутники в нижньому квадраті і знову при незмінній площі.

1. Проведемо відрізки *CF* і *AD*, отримаємо трикутники *BCF* і *BDA*.
2. Кути *CAB* і *BAG* — прямі; відповідно точки *C*, *A* і *G* — колінеарні. Так само *B*, *A* і *H*.
3. Кути *CBD* і *FBA* — обидва прямі; тоді кут *ABD* дорівнює куту *FBC*, оскільки обидва є сумою прямого кута та кута *ABC*.
4. Трикутник *ABD* та *FBC* рівні за двома сторонами та кутом між ними.
5. Оскільки точки *A*, *K* і *L* — колінеарні, площа прямокутника BDLK дорівнює двом площам трикутника *ABD* (*BDLK* = *BAGF* = *AB2*)
6. Аналогічно міркуюючи отримаєм *CKLE* = *ACIH* = *AC2*
7. З одного боку площа *CBDE* дорівнює сумі площ прямокутників *BDLK* та *CKLE*, а з другого боку площа квадрата *BC2*, або *AB2* + *AC2* = *BC2*.