# 1.3 Теорема [Піфагора](file:///G%3A%5C%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA%5C%D0%9F%D1%96%D1%84%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%80.mht)



Теорема Піфагора: *a*2 + *b*2 = *c*2

Анімаційне доведення теореми Піфагора

**Теоре́ма Піфаго́ра** — одна із **засадничих** теорем евклідової геометрії, котра встановлює співвідношення між сторонами прямокутного трикутника. Вважається, що вона доведена грецьким математиком Піфагором, на честь котрого вона названа (є й інші версії, зокрема альтернативна думка, що ця теорема у загальному вигляді була сформульована математиком-піфагорійцем Гіппасом).

|  |
| --- |
|  |

## Теорема

Теорема звучить наступним чином:

*В прямокутному трикутнику площа квадрата, побудованого на гіпотенузі дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах.*

Позначивши довжину гіпотенузи трикутника як *c*, а довжини катетів як *a* та *b*, отримаємо наступну формулу:



Таким чином, теорема Піфагора встановлює співвідношення, яке дозволяє визначити сторону прямокутного трикутника, знаючи довжини двох інших. Теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів, котра визначає співвідношення між сторонами довільного трикутника.

Також доведено зворотнє твердження (називають також зворотньою до теореми Піфагора):

*Для будь-яких трьох додатніх чисел a, b і c, таких що a² + b² = c², існує прямокутний трикутник з катетами a та b і гіпотенузою c.*

## Історія



Візуальне доведення для трикутника (3, 4, 5) з книги «Чу Пей» 500–200 до н.е.

Історію теореми можна розділити на чотири частини: знання про Піфагорові числа, знання про відношення сторін в прямокутному трикутнику, знання про відношення суміжних кутів та доведення теореми.

Мегалітичні споруди близько 2500 до н.е. в Єгипті та Північній Європі, містять прямокутні трикутники із сторонами з цілих чисел. Бартель Леендерт ван дер Варден висловив гіпотезу, що в ті часи Піфагорові числа були знайдені алгебраїчно.

Написаний між 2000 та 1876 до н.е. папірус часів Середнього Єгипетського царства *Berlin 6619* містить задачу розв’язком якої є числа Піфагора.

Під час правління Хамурапі Великого, вивилонська табличка *Plimpton 322*, написана між 1790 і 1750 до н.е містить багато записів тісно пов’язаних з числами Піфагора.

В сутрах Будхаяни, які датуються за різними версіями 8-им чи 2-им століттями до н.е. в Індії, містить Піфагорові числа виведені алгебраїчно, формулювання теореми Піфагора та геометричне доведення для рівнобедренного прямокутного трикутника.

В сутрах Апастамби (близько 600 до н.е.) міститься числове доведення теореми Піфагора з використанням обчислення площі. Ван дер Варден вважає, що воно було засноване на традиціях попередників. Згідно з Альбертом Бурком, це оригінальне доведення теореми і він припускає, що Піфагор відвідав Араконам і скопіював його.

Піфагор, роки життя якого зазвичай вказують 569 — 475 до н.е. використовує алгебраїчні методи розрахунку Піфагорових чисел, згідно з Прокловими коментарями до Евкліда. Прокл, однак, жив між 410 і 485 роками н.е. Згідно з Томасом Гізом, немає ніяких вказівок на авторство теореми протягом п’яти століть після Піфагора. Однак, коли такі автори як Плутарх або Ціцерон приписують теорему Піфагору, вони роблять це так, наче авторство широко відоме і безсумнівне.

Близько 400 до н. е. згідно Прокла, Платон дав метод розрахунку Піфагорових чисел, що що поєднував алгебру та геометрію. Близько 300 до н.е., в *Началах* Евкліда маємо найдавніше аксіоматичне доведення, яке збереглося до наших днів.

Написані десь між 500 до н.е. і 200 до н.е., китайська математична книга «Чу Пей» (周髀算经), дає візуальне доведення теореми Піфагора, яка в Китаї називається теорема Гугу (勾股定理), для трикутника із сторонами (3, 4, 5). Під час правління династії Хань, з 202 до н.е. до 220 н.е. Числа Піфагора з’являються в книзі «Дев’ять розділів математичного мистецтва» разом із згадкою про прямокутні трикутники.

Вперша зафіксоване використання теореми в Китаї, де вона відома як теорема Гугу (勾股定理) та в Індії, де вона відома як теорема Баскара.

Багато дискутується чи була теорема Піфагора відкрита один раз чи багато разів. Бойер (1991) вважає, що знання виявлені в Шульба Сутрах можуть бути месопотамського походження.

## Доведення

### Алгебраїчне доведення



Квадрати утворюються з чотрьох прямокутних трикутників.

Відомо понад сто доведень теореми Піфагора. Тут представлено доведення засноване на теоремі існування площі фігури:

1. Розмістимо чотири однакові прямокутні трикутники так, як це зображено на малюнку.
2. Чотирикутник зі сторонами *c* є квадратом, оскільки сума двох гострих кутів , а розгорнутий кут — .
3. Площа всієї фігури рівна, з одної сторони, площі квадрата зі стороною «a+b», а з іншої — сумі площ чотирьох трикутників і внутрішнього квадрату.





Що і необхідно було довести.

### За подібністю трикутників



Використання подібних трикутників.

Нехай *ABC* — прямокутний трикутник, в якому кут *C* прямий, як показано на рисунку. Проведемо висоту з точки *C*, і назвемо *H* точку перетину з стороною *AB*. Утворений трикутник *ACH* подібний до трикутника *ABC*, оскільки вони обидва прямокутні (за визначенням висоти), і в них спільний кут *A*, очевидно третій кут буде в цих трикутників також однаковий. Аналогічно міркуюючи, трикутник *CBH* також подібний до трикутника *ABC*. З подібності трикутників: Якщо

тоді



Це можна записати у вигляді



Якщо додати ці дві рівності, отримаєм



Іншими словами, Теорема Піфагора:



### Доведення Евкліда

В Евклідових «Началах», теорема Піфагора доведена методом паралелограмів. Нехай *A*, *B*, *C* вершини прямокутного трикутника, з прямим кутом *A*. Опустимо перпендикуляр з точки *A* на сторону протилежну до гіпотенузи в квадраті побудованому на гіпотенузі. Лінія ділить квадрат на два прямокутники, кожен з яких має таку саму площу, що й квадрати побудовані на катетах. Головна ідея при доведенні полягає в тому, що верхні квадрати перетворюються в паралелограми такої самої площі, а тоді повертаються і перетворюються в прямокутники в нижньому квадраті і знову при незмінній площі.

1. Проведемо відрізки *CF* і *AD*, отримаємо трикутники *BCF* і *BDA*.
2. Кути *CAB* і *BAG* — прямі; відповідно точки *C*, *A* і *G* — колінеарні. Так само *B*, *A* і *H*.
3. Кути *CBD* і *FBA* — обидва прямі; тоді кут *ABD* дорівнює куту *FBC*, оскільки обидва є сумою прямого кута та кута *ABC*.
4. Трикутник *ABD* та *FBC* рівні за двома сторонами та кутом між ними.
5. Оскільки точки *A*, *K* і *L* — колінеарні, площа прямокутника BDLK дорівнює двом площам трикутника *ABD* (*BDLK* = *BAGF* = *AB2*)
6. Аналогічно міркуюючи отримаєм *CKLE* = *ACIH* = *AC2*
7. З одного боку площа *CBDE* дорівнює сумі площ прямокутників *BDLK* та *CKLE*, а з другого боку площа квадрата *BC2*, або *AB2* + *AC2* = *BC2*.