**Алгебра**

**Алгебра** (від арабського *аль-джебр* — *відновлення*) — розділ математики, що вивчає властивості дій над різноманітними величинами і розв'язки рівняннь, повязаних з цими діями. Вивчення властивостей композицій різного виду в 19 столітті призвело до думки, що основне завдання алгебри — вивчення властивостей операцій незалежно від об'єктів, до яких вони застосовуються. З того часу алгебра стала розглядатися як загальна наука про властивості та закони композиції операцій. В наші дні алгебра — одна з найважливіших частин математики, що знаходить застосування як у суто теоретичних, так і в практичних галузях науки.

**Історія**

**Стародавній світ**

Розв'яжемо задачу:"Вік трьох братів 30, 20 і 6 років. Через скільки років вік старшого дорівнюватиме сумі віку обох молодших братів?" Позначивши шукану величину як х, складемо рівняння: 30 + х = (20 + х) + (6 + х), звідки х = 4. Близький до описаного метод розв'язання був відомий ще у II тисячолітті до н. е. переписувачам стародавнього Єгипту (проте вони не застосовували буквеної символіки). У збережених до наших днів математичних папірусах є не тільки задачі, що призводять до рівнянь першого степеня з одним невідомим, як у задачі про вік братів, а й задачі, що призводять до рівнянь виду aх² = b (див. Квадратне рівняння).

Ще складніші задачі вміли розв'язувати на початку II тисячоліття до н. е. у древньому Вавілоні: в математичних текстах, виконаних клинописом на глиняних табличках, є квадратні й біквадратні рівняння, системи рівнянь з двома невідомими і навіть найпростіші кубічні рівняння. При цьому вавілоняни також не використовували буквених позначень, а наводили розв'язки типових задач, зводячи розв'язок аналогічних задач до заміни числових значень. В числовій формі наводились також і деякі правила тотожних перетворень. Якщо при розв'язанні рівняння треба було знайти квадратний корінь числа а, яке не є точним квадратом, наближене значення кореня х знаходили як середнє арифметичне чисел х і а/х.

Перші загальні затвердження про тотожні перетворення зустрічаються у давньогрецьких математиків, починаючи з VI ст. до н. е. Серед математиків давньої Греції було прийнято висловлювати всі алгебраїчні твердження в геометричній формі. Замість додавання чисел говорили про додавання відрізків, добуток двох чисел тлумачили як площу прямокутника, а добуток трьох чисел як об'єм прямокутного паралелепіпеда. Алгебраїчні формули приймали вигляд співвідношень між площами і об'ємами. Наприклад, говорили, що площа квадрата, побудованого на сумі двох відрізків, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на цих відрізках, збільшеною на подвоєну площу прямокутника, побудованого на цих відтинках. Таким чином з'явилися терміни «квадрат числа» (тобто добуток величини на себе), «куб числа», «середнє геометричне». Геометричну форму у греків набув і розв'язок квадратного рівняння — вони шукали сторони прямокутника по заданим периметру та площі.

Більшість задач в Греції розв'язувалося шляхом побудов циркулем і лінійкою (див. Геометричні побудови). Але не всі задачі могли бути розв'язані такими методами. Прикладами таких задач є подвоєння куба, трисекція кута, завдання побудови правильного семикутника (див. Класичні задачі давнини). Всі вони зводились до кубічних рівнянь виду х³ = 2, 4х³ — Зх = а і х³+ х² — 2х — 1 = 0 відповідно. Для розв'язку цих задач було розроблено новий метод, — відшукання точок перетину конічних перетинів (еліпса, параболи і гіперболи).

Геометричний підхід до алгебраїчних проблем обмежував подальший розвиток науки. Наприклад, не можна було додавати величини різних розмірностей (довжини, площі, об'єм), не можна було говорити про добуток більш ніж трьох множників тощо Ідея відмови від геометричного трактування з'явилася у Діофанта Олександрійського, який жив у III ст. У його книзі «Арифметика» з'являється буквена символіка і спеціальні позначення для степенів аж до 6-ї. Були у нього і позначення для від'ємних степенів, від'ємних чисел, а також знак рівності (особливого знаку для додавання ще не було), стислий запис правил множення додатніх і від'ємних чисел. На подальший розвиток алгебри сильний вплив мали досліджені Діофантом задачі, що приводять до складних систем алгебраїчних рівнянь, у тому числі до систем, де кількість рівнянь була меншою кількості невідомих. Для таких рівнянь Діофант шукав лише додатні раціональні розв'язки (див. Діофантові рівняння).

З VI ст. центр математичних досліджень переміщається в Індію, Китай, країни Близького Сходу та Середньої Азії. Китайські вчені розробили метод послідовного виключення невідомих для розв'язання систем лінійних рівнян, дали нові методи наближеного розв'язку рівнянь вищих степенів. Індійські математики використовували від'ємні числа, вдосконалили буквену символіку. Однак лише в працях вчених Близького Сходу та Середньої Азії алгебра оформилася у самостійну галузь математики, що займається розв'язком рівнянь. У IX в. узбецький математик і астроном Мухаммед аль-Хорезмі написав трактат «Китаб аль-джебр валь-мукабала», де дав загальні правила для розв'язання рівнянь першого степеня. Слово «аль-джебр» (відновлення), від якого нова наука отримала свою назву, означало перенесення від'ємних членів рівняння з однієї частини в іншу з зміною знака. Вчені Сходу вивчали розв'язок кубічних рівнянь, хоча не зуміли отримати загальної формули для їх коренів. У Європі вивчення алгебри почалося в XIII ст. Одним з великих математиків цього часу був італієць Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (близько. 1170 — після 1228). Його «Книга абака» (1202) — трактат, який містив відомості про арифметику і алгебру до квадратних рівнянь включно (див. Числа Фібоначчі). Першим великим самостійним досягненням західноєвропейських вчених було відкриття в XVI ст. формули для розв'язання кубічного рівняння. Це було заслугою італійських алгебраїстів С. дель Ферро, Н. Тарталья і Дж. Кардано. Учень Дж. Кардано Л. Феррарі розв'язав і рівняння 4-го степеня (див. Алгебраїчне рівняння). Вивчення деяких питань, пов'язаних з коренями кубічних рівнянь, привело італійського алгебраїста Р. Бомбеллі до відкриття комплексних чисел.

**Розвиток символіки**

Відсутність зручної і добре розвиненої символіки сковувало подальший розвиток алгебри: найскладніші формули доводилося викладати у словесній формі. Наприкінці XVI в. французький математик Ф. Вієт ввів буквені позначення не тільки для невідомих, й для довільних постійних величин. Символіка Вієта була вдосконалена його послідовниками. Остаточний вид їй надав на XVII в. французький філософ і математик Р. Декарт, який ввів (вживані донині) позначення для показників степенів.

Поступово розширювався запас чисел, з якими можна було виконувати дії. Завоювали права громадянства від'ємні числа, потім — комплексні, вчені стали вільно застосовувати ірраціональні числа. При цьому виявилося, що, попри таке розширення запасу чисел, раніше встановлені правила алгебраїчних перетворень зберігають свою силу. Нарешті, Декарту вдалося звільнити алгебру від невластивої їй геометричної форми. Все це дозволило розглядати питання розв'язку рівнянь у найзагальнішому вигляді, застосовувати рівняння до розв'язання геометричних задач. Наприклад, задача про знаходження точки перетину двох прямих звелася до розв'язку системи рівнянь, яким задовольняли точки цих прямих. Такий метод розв'язку геометричних задач отримав назву аналітичної геометрії.

Розвиток буквеної символіки дозволив встановити загальні твердження щодо алгебраїчних рівнянь: теорема Безу про подільності багаточлена *P(х)* на двочлен *(х — а)*, де *a* — корінь цього багаточлена; формула Вієта для співвідношення між коренями квадратного рівняння і його коефіцієнтами; правила, які дозволяють оцінювати кількість дійсних коренів рівняння; загальні методи виключення невідомих з систем рівнянь тощо.

**Подальші успіхи щодо традиційних задач алгебри**

Особливо далеко в сфері розв'язку систем лінійних рівнянь вдалось просунутись в XVIII ст. — для них були отримано формули, які дозволяють виразити розв'язок через коефіцієнти і вільні члени. Подальше вивчення таких систем рівнянь привело до теорії матриць і визначників. Наприкінці XVIII в. було доведено, що будь-яке алгебраїчне рівняння з комплексними коефіцієнтами має хоча б один комплексний корінь. Це твердження називається основний теореми алгебри. Протягом двох з половиною століть увагу алгебраїстів була прикута до задачі про виведення формули для розв'язку загального рівняння 5-ї степені. Треба було виразити розв'язок цього рівняння через його коефіцієнти за допомогою арифметичних операцій і коренів (розв'язати рівняння в радикалах). Лише в XIX ст. італієць П. Руффіні і норвежець Н. Абель незалежно один від одного довели, що такої формули не існує. Ці дослідження були завершено французьким математиком Е. Галуа, методи якого дозволили для такого рівняння визначити, розв'язується воно в радикалах чи ні. Один з найвизначніших математиків — К. Гаус з'ясував, коли можна побудувати циркулем і лінійкою правильний n-кутник: дана задача була напряму пов'язана з вивченням коренів рівняння *xn = 1*. З'ясувалося, що вона розв'язна лише тоді, коли число n є простим числом Ферма чи добутком кількох різних простих чисел Ферма. Тим самим молодий студент (Гаусу було тоді лише 19 років) розв'язав задачу, якою безуспішно займалися вчені понад два тисячоліття.

**Розширення області досліджень алгебри**

На початку XIX, було розв'язано основні задачі, що стояли перед алгеброю в першому тисячолітті її розвитку. Алгебра отримала самостійне обґрунтування, не що спирається на геометричні поняття, а алгебраїчні методи стали застосовуватися для розв'язку геометричних задач. Були розроблені правила буквеного числення для раціональних і ірраціональних виразів, з'ясоване питання про можливість розв'язання рівнянь в радикалах і побудована строга теорія комплексних чисел. Сторонньому спостерігачеві могло здатися, що тепер математики вирішуватимуть нові класи алгебраїчних рівнянь, доводити нові алгебраїчні тотожності і тощо. Проте розвиток алгебри стала розвиватися іншим шляхом: з науки про буквені обчислення і рівняння вона перетворилася в загальну науку про операції та їх властивості.

Після створення теорії комплексних чисел постало питання про існування «гіперкомплексних чисел» — чисел з кількома «уявними одиницями». Таку систему чисел, які мали вигляд *a + bi + cj + dk*, де i2 = j2 = k2 = −1, побудував в 1843 р. ірландський математик В. Гамільтон, назвавши їх «кватерніонами». Правила дій над кватерніонами нагадують правила звичайної алгебри, проте операція множення не є комутативною: наприклад, ij = k, а ji = — k.

З операціями, властивості яких лише частково нагадують властивості арифметичних операцій, математики XIX ст. зіштовхнулися і в інших питаннях. У 1858 р. англійський математик А. Келі ввів загальну операцію множення матриць і вивчив її властивості. Виявилося, що до множення матриць зводиться багато вивчених раніше операції. Англійський логік Джордж Буль в середині XIX ст. почав вивчати операції над висловлюваннями, які дозволяли з двох даних висловлювань побудувати третє, а наприкінці XIX ст. німецький математик Г. Кантор ввів операції над множинами: об'єднання, перетин тощо. Виявилося, що і як в випадку операцій над висловлюваннями, так операції володіють властивостями комутативності, асоціативністю і дистрибутивності, але деякі їх властивості не схожі на властивості операцій над числами.

Таким чином протягом XIX ст. виникли різні види алгебр: звичайних чисел, комплексних чисел, кватерніонов, матриць, висловлювань, множин. Кожна з них мала свої правила, свої тотожності, свої методи розв'язку рівнянь. При цьому для деяких видів алгебр правила були дуже схожими. Наприклад, правила алгебри раціональних чисел не відрізняються від правил алгебри дійсних чисел. Саме тому формули для раціональних чисел, виявляються вірними і для будь-яких дійсних (і навіть будь-яких комплексних) чисел. Однаковими виявилися правила в алгебрі висловлювань і в алгебрі множин. Все це привело до абстрактного поняття композиції, тобто операції, яка кожній парі *(a, b)* елементів певної множини ставить в відповідність третій елемент цієї ж множини. Композиціями є додавання і множення натуральних, цілих, раціональних, дійсних та комплексних чисел, множення матриць, перетин і об'єднання підмножин певної множини, тощо. А віднімання і ділення в полі натуральних чисел не є композиціями, бо різниця і частка можуть не бути натуральними числами.

Вивчення властивостей композицій різного виду призвело до думки, що основне завдання алгебри — вивчення властивостей операцій незалежно від об'єктів, до яких вони застосовуються. Інакше кажучи, — алгебра стала розглядатися як загальна наука про властивості та закони композиції операцій. При цьому дві множини, в кожній з яких визначені композиції, стали вважати тотожними з погляду алгебри (ізоморфними), якщо між цими множинами можна встановити взаємно-однозначну відповідність, що переводить один закон композиції в інший. Якщо дві множини з композиціями ізоморфні, то, вивчаючи одну з них, дізнаємося алгебраїчні властивості іншої.

Оскільки сукупність різних множин з заданими в них законами композиції необмежена, було виділено типи таких множин, які хоча й не ізоморфні, проте мають спільні властивості композиції. Наприклад, вивчивши властивості операцій додавання і множення над множинами раціональних, дійсних і комплексних чисел, математики створили загальне поняття поля — множини, де визначено ці дві операції, причому виконуються їх звичайні властивості. Дослідження операції множення матриць призвело до виділення поняття групи, яке є нині одним з найважливіших не тільки в алгебрі, й в усій математиці.